

7. Il valore della teoria dei giochi

di Alan Kirman

1. Introduzione

«Il linguaggio della teoria dei giochi – coalizioni, payoff, mercati, voti – indica che essa non è un ramo della matematica astratta; che è motivata dal mondo intorno a noi e a questo connessa e che dovrebbe poterci dire qualcosa a proposito del mondo». Aumann [1985]

[...] la teoria dei giochi non è solo matematica astratta; si occupa del mondo reale. Vogliamo, in realtà capire, i concetti usati nella vita reale per analizzare i conflitti di interessi, per scoprire leggi nuove del comportamento umano nella società e per spiegare, forse addirittura prevedere, le interazioni sociali. Cionondimeno, la teoria dei giochi è astratta. È proprio perché la teoria dei giochi è astratta, ma è anche in relazione con il mondo, che dobbiamo creare un ponte tra i concetti formali ed astratti della teoria ed il mondo reale.

Un'interpretazione è una rappresentazione che lega una teoria formalizzata con il linguaggio quotidiano. Rubinstein [1988]

Quando la teoria dei giochi conobbe i suoi primi sviluppi ad opera di Von Neumann e Morgenstern [1944] fu finalizzata esplicitamente alla modellizzazione di situazioni sociali, economiche o politiche, nelle quali si verificavano conflitti di interessi. La speranza espressa al tempo era che, in particolare in economia, molti problemi potessero essere esaminati sotto una nuova luce e che il nuovo approccio potesse fornire risultati laddove la teoria economica tradizionale aveva poco da dire.

In effetti il paradigma basilare della teoria dei giochi può essere visto come una situazione in cui gli agenti individuali hanno un'influenza specifica sul risultato del processo economico e quindi usano il loro comportamento strategico per influenzare quei risultati tenendo in considerazione il comportamento degli «avversari». Il paradigma della teoria economica neoclassica è diametralmente opposto a questo: il modello di concorrenza perfetta si basa sulla premessa che l'influenza degli agenti sia trascurabile e che l'unica interazione fra gli individui si abbia attraverso il sistema dei prezzi. Anche nelle varianti più sofisticate del modello, per esempio nel quadro generale delle «aspettative razionali», l'azione strategica interpersonale non viene contemplata.

Quando questo specifico comportamento è stato preso in considerazione, gli economisti si sono sempre riferiti alla «concorrenza imperfetta», dando l'impressione che questa fosse una situazione eccezionale piuttosto che normale. In effetti era immediatamente chiaro che il pioniere della concorrenza imperfetta, Cournot, aveva anticipato l'opera di Nash. Tuttavia, l'insistenza iniziale degli studiosi di teoria dei giochi sui giochi a somma zero o costante – proprio quelli che sono di minor interesse in economia, dato che ogni attività economica, anche quella dello scambio, produce guadagni per tutti i partecipanti – ridusse considerevolmente l'entusiasmo degli economisti per la materia.

Si è avuta poi una rinascita di interesse con l'integrazione della concorrenza imperfetta e del risultante equilibrio di Nash nella teoria dell'equilibrio economico generale e con l'uso della teoria dei giochi non cooperativi per lo studio di problemi macroeconomici internazionali. L'altro ramo della teoria, che si interessava del comportamento cooperativo e della formazione delle coalizioni, già anticipato da Edgeworth (1881), ricevette molta attenzione dagli economisti negli anni '60 e '70 ed il risultato basilare di Edgeworth, cioè che in economie di grandi dimensioni il risultato cooperativo di un «gioco economico» coincide con la soluzione concorrenziale, è stato generalizzato e perfezionato. [Si veda per questo Debreu-Scarff 1963, Hildenbrand 1974, e Hildenbrand e Kirman 1988].

Recentemente è stata studiata a fondo l'evoluzione nel tempo del comportamento cooperativo in situazioni nelle quali la soluzione statica sarebbe non-cooperativa, e ciò ha fornito nuovi modi di considerare numerose situazioni economiche in cui si osserva «collusione tacita».

Tutto ciò ha significato una rinascita dell'interesse per la teoria dei giochi in economia¹; il che ha fornito contributi di valore alla comprensione di alcuni fenomeni empirici.

Il fine di questo lavoro è dare due esempi connessi all'uso degli strumenti della teoria dei giochi cooperativi nella soluzione di problemi economici concreti. Il primo è preso direttamente da una situazione in cui alcune grandi società petrolifere dovettero negoziare lo sfruttamento cooperativo di giacimenti di gas naturale in loro possesso in una determinata regione. Il secondo riguarda il modo in cui i prezzi dovrebbero essere determinati per allocare le risorse in una situazione produttiva nella quale i rendimenti di scala sono crescenti. In quest'ultimo caso i prezzi costruiti in modo da garantire la riparti-

¹ Per un approfondimento a questo proposito e per delle riflessioni sui contributi della teoria dei giochi, si veda, per es., Aumann [1985] e Rubinstein [1988].

zione dei costi sono già stati applicati alle tariffe di atterraggio aeroportuale ad opera di Littlechild e Thompson [1977], e all'attribuzione del costo di una rete telefonica da Billera, Heath e Raanan [1918].

In entrambe le applicazioni il valore di Shapley del gioco cooperativo ha un ruolo determinante.

2. Giochi cooperativi

Iniziamo col considerare un gioco con un numero finito n di giocatori, sebbene sia utile in seguito estendere quest'ipotesi. Poiché ci interessa la cooperazione, dobbiamo focalizzare l'attenzione su chi coopera con chi, e da questo passare alla nozione di coalizione. Le coalizioni possono agire in due modi. In primo luogo possono raggiungere qualcosa attraverso la produzione, lo scambio o qualsiasi altra attività che generi profitti o, più in generale, utilità. In secondo luogo possono ostacolare determinati risultati sollevando obiezioni o addirittura minacciando di ritirarsi dal gioco e dall'economia. È ovvio che sono i risultati raggiungibili da una coalizione che determinano l'efficacia di essa nel secondo di questi ruoli.

Limitiamoci per il momento a considerare quei giochi o quelle situazioni ad utilità trasferibile; se un livello totale di utilità U è possibile per una coalizione, questo può essere ripartito in ogni modo concepibile tra i giocatori. Possiamo in questo caso sommare le utilità invece di dover specificare i livelli di utilità per ogni singolo giocatore.

Per considerare le definizioni, possiamo dire che in un gioco a n giocatori ogni sottoinsieme non vuoto di $N = \{1, 2, \dots, n\}$ costituisce una coalizione.

La funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori è una funzione a valori reali, v , definita sui sottoinsiemi o coalizioni di N .

I valori di questa funzione $V(S)$ per una data coalizione S possono essere interpretati come risultato di un gioco non cooperativo tra la coalizione S ed il resto dei giocatori, $N-S$. In altre parole $V(S)$ è ciò che i membri di S possono garantirsi indipendentemente dalle scelte del resto dei giocatori.

Ora, dato un gioco di questo tipo, siamo naturalmente interessati alle soluzioni: cioè due imputazioni ai giocatori che sono in qualche senso stabili. Esistono diversi concetti di soluzione; concentreremo l'attenzione, in questa sede, su due in particolare: il nucleo (Core) ed il Valore di Shapley.

Iniziamo dal nucleo e dalle allocazioni o «imputazioni di utilità» che contiene. Un'imputazione x non è altro che un'utilità x_i per ogni membro del gioco o dell'economia che soddisfa la condizione:

$$\sum_{i \in N} x_i = V(N)$$

L'idea che un'imputazione appartenga al nucleo è intuitivamente semplice. Se per una imputazione x proposta, una certa coalizione di individui può formarsi e ottenere un'utilità maggiore di quella ottenuta in x , allora si dice che la coalizione è in grado di «migliorare» rispetto a x , cioè,

Definizione:

una coalizione C è in grado di «migliorare» rispetto ad un'imputazione x se:

$$\sum_{i \in C} x_i < V(C)$$

Se non esiste nessuna coalizione capace di «migliorare» l'imputazione x , quest'ultima è nel nucleo, cioè,

Definizione

Il «nucleo» di un gioco cooperativo ad n giocatori in forma di funzione caratteristica è l'insieme delle imputazioni non «migliorabili» da nessuna coalizione degli $N = (1, 2, \dots, n)$ giocatori.

Prima di procedere all'esame di altri concetti risolutivi vediamo un esempio pratico tratto da una situazione reale.

Esempio:

Sfruttamento di giacimenti di gas naturale.

Tre società petrolifere i , j e k devono risolvere il problema dello sfruttamento di tre giacimenti minerali A , B e C . Il gas viene venduto ad una società monopolistica m .

1) La società i è proprietaria di un giacimento A , già in attività, che fornisce 15.000 m^3 al giorno. Il gas viene trasportato alla società m attraverso un gasdotto esistente, che ha una capacità di 45.000 m^3 al giorno; questo è un dato: le decisioni riguardano tutto il resto.

2) La società i divide un altro giacimento B , diviso da una faglia, potenzialmente permeabile, con la società j . La società i può ottenere da B 12.000 m^3 al giorno; la società j 18.000 m^3 al giorno dallo stesso giacimento.

La situazione è complicata dal fatto che 3.000 m^3 al giorno devono essere estratti nel lato a sud della faglia, mentre gli altri 15.000 nel lato a nord.

Le condizioni geologiche nel lato nord del giacimento B sono meno favorevoli che quelle nel lato sud.

3) La società k possiede il giacimento C che rende giornalmente 15.000 m^3 . Sebbene il gas sia attualmente estraibile, non è ancora stato costruito un gasdotto:

4) La società j asserisce che sfruttando da sola la sua parte di B e costruendo un gasdotto andrebbe appena in pareggio.

5) La società m non desidera ricevere più di 45.000 m³ al giorno (apparentemente, perché teme che l'elasticità di prezzo sia tale da abbassare sostanzialmente il prezzo di vendita per quantità maggiori).

Si fanno le ulteriori ipotesi semplificatrici:

- a) durata del progetto e della valutazione: 10 anni;
- b) tasso di interesse r fisso, posto al 7%;
- c) prezzo del gas P costante nel tempo, posto a 3 \$ (questo viola 5 ma rinforza i nostri risultati);
- d) costo del gasdotto, C , fisso indipendentemente dalla capacità e pari a ½ milione di \$;
- e) l'unico giacimento per cui vi sono costi di esplorazione e di sviluppo è B e i costi totali nel lato nord sono maggiori di quelli nel lato sud di una costante: $C_N = C_S + \varepsilon$.

È possibile visualizzare il problema nella figura 1.

Il problema è ora di calcolare il valore di ogni coalizione. Dapprima consideriamo le coalizioni individuali di ognuna delle tre società.

Società i

La società i potrebbe, indipendentemente, estrarre 12.000 m³ da B e trasportarli attraverso le condutture da lei possedute alla società m . Il valore in questo caso è:

$$V(\{i\}) = \sum_{t=1}^{10} \frac{12 (P - C_i)}{(1+r)^t}$$

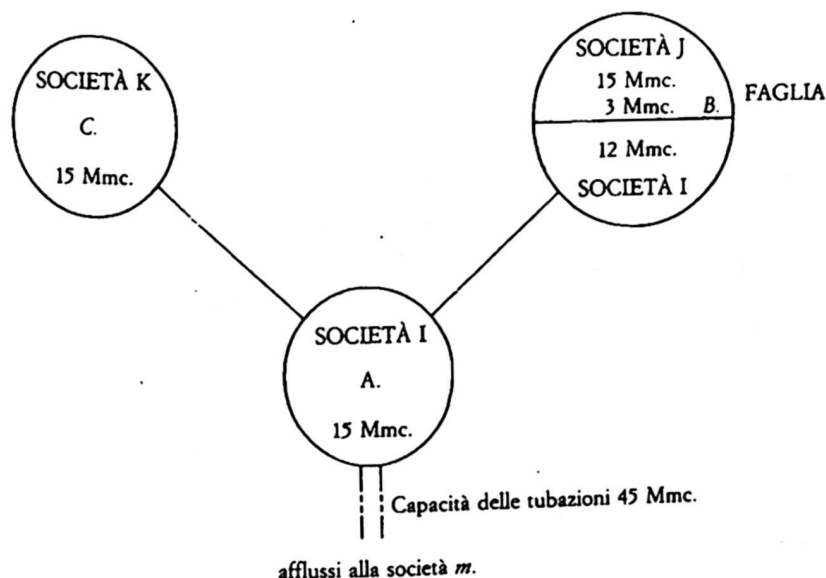


FIG. 1.

Società j

Data la situazione geologica j può sempre contare sulla possibilità di estrarre i suoi 18.000 m³ giornalieri, cioè deve esistere un accordo produttivo fra i e j anche se non esistono accordi per il trasporto e per la vendita del gas². Perciò la strategia indipendente della società j sarà di produrre 18.000 m³ e di costituire una condotta di trasporto

$$V(\{j\}) = \sum_{t=1}^{10} \left(\frac{15(P-C_N)}{(1+r)^t} + 3 \frac{(P-C_S)}{(1+r)^t} \right) - C$$

Sappiamo tuttavia che l'operazione indipendente per (la zona sud) e la zona nord andrebbe in pareggio, per cui abbiamo:

$$[1] \quad \sum_{t=1}^{10} \frac{15(P-C_N)}{(1+r)^t} - C = 0$$

Riordinando otteniamo

$$V(\{j\}) = \sum_{t=1}^{10} \frac{3(P-C_S)}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{10} \frac{3(P-C_N)}{(1+r)^t} + \sum_{t=1}^{10} \frac{3(C_N-C_S)}{(1+r)^t}$$

Dalla (1) ponendo:

$$\gamma = \sum_{t=1}^{10} \frac{15(C_N-C_S)}{(1+r)^t}$$

abbiamo:

$$[2] \quad V(\{i\}) = \frac{C+\gamma}{5}$$

Possiamo, convenientemente, riscrivere:

$$V(\{i\}) = \frac{4(C+\gamma)}{5}$$

² La situazione sarebbe diversa, naturalmente, se questa ipotesi fosse modificata, ma ciò è quanto è stato assunto dalla società che ha elaborato le valutazioni.

Consideriamo ora la società k :

La strategia individuale di k è semplicemente di estrarre i suoi 15.000 m³ giornalieri e di costruire un proprio gasdotto.

Perciò:

$$V(\{k\}) = \sum_{t=1}^{10} \frac{15 P}{(1+r)^t} - C$$

Ponendo:

$$H = \sum_{t=1}^{10} \frac{15 P}{(1+r)^t}$$

abbiamo:

$$V(\{k\}) = H - C$$

Esaminiamo ora le possibilità per ogni coalizione di due giocatori. I valori di queste coalizioni sono di agevole valutazione.

Società i e j :

Queste due società possono sfruttare insieme l'intero loro giacimento comune e trasportare il gas naturale attraverso il gasdotto esistente. Ciò permette di risparmiare il costo del gasdotto che j avrebbe dovuto costruire.

$$V(\{i, j\}) = V(\{i\}) + V(\{j\}) + C$$

Società j e k :

Le due società possono ottenere insieme i loro 18.000 e 15.000 m³ rispettivamente e trasportare il gas naturale attraverso un gasdotto costruito collettivamente, economizzando in questo modo, il costo di costruzione di un gasdotto. Perciò abbiamo:

$$V(\{j, k\}) = V(\{j\}) + V(\{k\}) + C$$

cioè

$$V(\{j\}) = H + \frac{1}{5}(C + \gamma)$$

Società i e k:

Anche in questo caso la coalizione economizza il costo del gasdotto che k avrebbe dovuto costruire. In questo modo le due società producono rispettivamente 12.000 e 15.000 m³ e il valore della coalizione è:

$$V(\{i, k\}) = V(\{i\}) + V(\{k\}) + C$$

quindi

$$V(\{i, k\}) = H + \frac{4}{5}(C + \gamma)$$

La «grande coalizione» delle società i, j e k:

Questa coalizione ha due possibilità:

1) estrarre tutto il gas naturale ora, e cioè produrre 45.000 m³ al giorno, e costruire un gasdotto addizionale per integrare quello esistente. In questo caso si risparmia il costo di un gasdotto rispetto alle valutazioni individuali. Cioè:

$$V(\{i, j, k\}) = H + C + \gamma$$

oppure

2) fornire solo il gas necessario per utilizzare pienamente il gasdotto esistente. La produzione di gas naturale a cui rinunciare sarebbe quella a più alto costo, che è quella ottenuta nel giacimento B comune. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} V(\{i, j, k\}) &= \sum_{t=1}^{10} \frac{15(P - C_N) + 15P}{(1+r)^t} + \\ &+ \sum_{t=1}^{10} \frac{15(P - C_S)}{(1+r)^{(10+t)}} = C + H + \gamma + \frac{C}{(1+r)^{10}} \end{aligned}$$

Poiché il secondo caso domina chiaramente il primo per ogni valore di $r \geq 0$, ci limiteremo alla considerazione di questo.

Prima di passare alla soluzione del problema ricordiamo incidentalmente che nella sua costruzione sono state fatte molte semplificazioni. Le ipotesi di prezzi costanti unitamente a quella di costi uguali e costanti sono, chiaramente, implausibili, come del resto è irrealistica l'ipotesi di un costo del gasdotto fisso indipendentemente dalle dimensioni. Queste caratteristiche non danneggiano particolarmente l'analisi svolta in questa sede, ma in generale, potrebbero modificare i

risultati. Il nostro scopo è comunque quello di trarre una semplice conclusione e non di fornire un esempio del tutto realistico.

Soluzioni

1) Il «nucleo»

Il nucleo di questo gioco è l'insieme delle imputazioni che non possono essere dominate da alcuna coalizione. Per cui, per ogni x appartenente al «nucleo» devono valere le seguenti relazioni:

$$x_i \geq 4/5 (C + \gamma)$$

$$x_j \rightarrow \frac{C + \gamma}{5}$$

$$x_k \geq H - C$$

$$x_i + x_j \geq 2 C + \gamma$$

$$x_j + x_k \geq H + \frac{C + \gamma}{5}$$

$$x_i + x_k \geq H + 4 \frac{(C + \gamma)}{5}$$

$$x_i + x_j + x_k = H + C + \gamma + \frac{C}{(1+r)^{10}}$$

Nel caso particolare considerato, la società che ha elaborato i calcoli ha posto il tasso di interesse pari al valore che soddisfa:

$$\frac{1}{(1+r)^{10}} = \frac{1}{2}$$

È facile vedere che l'unico punto appartenente al «nucleo» è l'allocazione:

$$x_i = 13/10 C + 4\gamma/5$$

$$x_j = 7/10 C + \gamma/5$$

$$x_k = H - C/2$$

Se il tasso di interesse fosse più basso si avrebbe un guadagno fra 0 e $C/2$ che potrebbe essere diviso in qualsiasi modo fra i tre giocatori.

2) Il valore di Shapley

Shapley introdusse una soluzione al problema del gioco cooperativo, la quale specifica univocamente ciò che ogni giocatore dovrebbe ottenere, derivandola da assiomi molto semplici.

Egli definì determinate condizioni che la funzione del valore $\varphi(V)$, in cui V rappresenta il gioco, deve soddisfare. Introduciamo, per semplicità, dei «dummy players», cioè dei giocatori il cui contributo ad ogni coalizione è nullo. Il valore di Shapley di un gioco V è quindi un vettore per il quale valgono:

$$1) \sum_{i \in N} \varphi_i(V) = V(N)$$

2) Sia M una permutazione di N e definiamo il gioco MV allora:

$$\varphi_{M(i)}[MV] = \varphi_i(V)$$

3) Se U e V sono due giochi con lo stesso numero N di giocatori allora:

$$\varphi_i[U+V] = \varphi_i(U) + \varphi_i(V)$$

La seconda condizione è l'unica che richiede un'interpretazione: essa semplicemente stabilisce che permutando l'ordine dei giocatori nello stesso gioco, il valore non viene modificato.

MV è il gioco definito da U tale che se M è una permutazione di N e se $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, allora:

$$U(M(i_1), M(i_2), M(i_3), \dots, M(i_k)) = V(S)$$

È notevole che queste condizioni danno una soluzione unica definita da:

$$\varphi_i(V) = \sum_{K \subset N} [V(K) - V(K \setminus \{i\})] \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

Questa soluzione ha un'interpretazione semplice. Consideriamo il giocatore i . Supponiamo che i giocatori entrino in una stanza uno per volta fino a che non siano tutti presenti. Supponiamo di fare ciò in tutti i modi possibili. Ora, per ogni ordine di ingresso consideriamo il punto in cui i entra. Nella stanza ci sarà già una certa coalizione S ed il contributo marginale di i al «valore» di questa coalizione sarà $V(S+\{i\}) - V(S)$.

Facendo ora il valore medio su tutti i possibili ordini di ingresso

avremo il valore di Shapley per quel giocatore. Il suo valore è il contributo marginale medio che egli arreca ad una coalizione.

Possiamo ora tornare al gioco specifico o al problema economico esaminato in precedenza e calcolarne il valore di Shapley.

Per semplicità di notazione poniamo:

$$V_i = V(\{i\}) \quad V_{ij} = V(\{i, j\}) \text{ e così via.}$$

Abbiamo che il «Valore di Shapley» per i , che definiamo R_i è dato da:

$$R_i = \frac{1}{3} V_{ijk} - \frac{1}{3} V_{jk} + \frac{1}{6} V_{ij} + \frac{1}{6} V_{ik} + \frac{1}{3} V_i - \frac{1}{6} V_j - \frac{1}{6} V_k$$

Ma nell'esempio tutte le coalizioni di due società risparmiano unicamente il costo di un gasdotto rispetto alle coalizioni individuali, cioè:

$$V_{ij} = V_i + V_j + C$$

$$V_{ik} = V_i + V_k + C$$

$$V_{jk} = V_j + V_k + C$$

Da cui:

$$R_i = V_i + \frac{1}{3} [V_{ijk} - (V_i + V_j + V_k)]$$

L'espressione fra parentesi è il guadagno della coalizione a tre giocatori rispetto alla somma delle tre coalizioni individuali. Ma quest'ultimo è dato da

$$3 \frac{C}{2}$$

che, date le ipotesi iniziali è pari a:

$$\frac{3}{2} 750.000 \$ = 1.125.000 \$$$

ogni singola società riceve quindi:

$$V(\{i\}) + 375.000 \$$$

Il guadagno diviso dalle tre società può essere scomposto come segue.

Per il giacimento di proprietà di k :

i riceve $1/11$ del guadagno e k $10/11$

Per il giacimento di proprietà di i e j :

i riceve $59/100$ e j $41/100$.

Questa è la soluzione decisa in definitiva dalle società. Si noti, incidentalmente, che in questo caso il valore di Shapley coincide con l'unica allocazione presente nel nucleo. Se il nucleo fosse stato più grande quel valore sarebbe stato uno specifico punto all'interno del nucleo; e sarebbe esistito comunque anche se il nucleo fosse stato vuoto.

La soluzione pratica del problema è stata di distribuire o le quantità prodotte, o i proventi ed i costi delle proporzioni date dal valore di Shapley.

Esistono, naturalmente, molti altri concetti di soluzione, come quello del Nucleolo o dell'Insieme stabile che vengono anche utilizzati nella pratica. Nel nostro particolare esempio abbiamo limitato l'attenzione alla soluzione che è stata effettivamente scelta nella realtà.

3. Un altro uso del valore di Shapley

Uno dei problemi maggiori nell'economia della regolamentazione, soprattutto in presenza di rendimenti di scala crescenti, è come trovare quei prezzi che ripartiscono equamente i costi. Un esempio famoso a questo proposito è quello fornito da Littlechild e Thompson [1977] che hanno individuato le tariffe di atterraggio aeroportuale in modo da allocare il costo di costruzione e di mantenimento dei servizi aeroportuali. A questo fine, essi hanno usato il Valore di Shapley di un gioco finito in cui i giocatori sono i velivoli che atterrano.

Billera, Heath e Raanan [1978] hanno usato il Valore di Shapley per giochi non atomistici col fine di ripartire «equamente» il costo del sistema telefonico della Cornell University tra chiamate diverse per tipologia e distanza. È interessante vedere come in questo caso quello che poteva sembrare una sterile generalizzazione tecnica del «Valore di Shapley» per i giochi finiti si rivelò di utilità pratica. In questi calcoli lo spazio dei giocatori corrisponde al tempo speso nei vari tipi di chiamate telefoniche.

Mirman e Tauman [1982] hanno mostrato che i cosiddetti prezzi

di Aumann-Shapley possano essere derivati da un insieme di semplici assiomi basati esclusivamente sulle funzioni di costo e sulle quantità prodotte. Naturalmente i risultati di equilibrio dipendono sia dai costi sia dalla domanda.

Prima di descrivere gli assiomi alcune osservazioni meritano di essere considerate. Quando i rendimenti di scala sono costanti o decrescenti i prezzi di Aumann e Shapley corrispondono ai prezzi al costo marginale. A differenza dei prezzi di Ramsey, ampiamente discussi, non si richiede nessuna conoscenza dell'utilità o della domanda degli individui. Infine, due beni che contribuiscono al costo in egual misura hanno esattamente lo stesso prezzo, il che non è una caratteristica dei prezzi di Ramsey e nemmeno, incidentalmente, una caratteristica economica necessariamente positiva.

Consideriamo m beni e sia $F(\alpha_1 \dots \alpha_m)$ il costo di approvvigionamento di α_i del bene i . Dato un vettore $\alpha_1 \dots \alpha_m$ possiamo definire un gioco non atomistico; il valore di Shapley del gioco, $\varphi(W, \alpha)$, mostra l'effetto di una unità di ogni tipo di bene sul costo totale. I «prezzi» quindi sono dati da:

$$P_i(F, \alpha) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(t\alpha) dt \quad i = 1, \dots, m$$

Questi prezzi di Aumann-Shapley sono gli unici che soddisfano cinque assiomi dei quali forniamo solo un'interpretazione intuitiva.

- 1) Il costo totale deve eguagliare il ricavo totale.
- 2) Additività. Se i costi possono essere scomposti in due parti separate, allora la somma dei prezzi delle singole componenti deve uguagliare i prezzi determinati dalle funzioni di costo.
- 3) Se F è non-decrescente i prezzi sono positivi.
- 4) Coerenza. Se i prodotti hanno gli stessi costi, essi hanno anche gli stessi prezzi per le stesse quantità.
- 5) Ordine di scala. Cambiando le unità di misura i prezzi variano proporzionalmente.

Sottolineiamo nuovamente che i prezzi di Aumann-Shapley sono gli unici che soddisfano questi assiomi.

Questi prezzi permettono di ottenere una ripartizione di costo che i prezzi di costo marginale non sempre forniscono e non richiedono la massimizzazione di alcuna funzione di benessere sociale interpersonale, come invece accade per i prezzi di Ramsey.

Ancora una volta si deve sottolineare che, imponendo il rispetto di semplici condizioni, si ottiene una specifica soluzione calcolabile, la quale, pure se derivata da considerazioni astratte di teoria dei giochi, trova immediata applicazione pratica una volta nota la struttura dei costi.

4. Estensioni

Una delle obiezioni principali al concetto di valore di Shapley, come accennato in precedenza, è che questo riguarda solo i giochi con utilità trasferibile. È possibile comunque estendere la nozione a giochi ad utilità non trasferibile usando il cosiddetto «valore di trasferimento λ », un concetto mutuato da Harsanyi [1959] e sviluppato in Shapley [1969]. Possiamo definire un gioco assegnando pesi λ_i ad ogni membro e massimizzare poi la somma ponderata delle utilità dei membri di una coalizione S , ottenendo $V(\lambda, S)$. Cerchiamo ora il valore di Shapley del gioco. In generale questo non è consigliabile nel gioco originario e il valore di trasferimento utilizza quei pesi per i quali il valore del gioco ad utilità trasferibile è ottenibile nel gioco originario.

Ciò fa sì che il valore di Shapley sia applicabile alla maggior parte dei giochi ad utilità non trasferibile.

Un'altra obiezione sollevata al valore di Shapley è che esso è di difficile calcolo quando il numero dei giocatori è grande. La stessa considerazione vale naturalmente anche per il nucleo. Sappiamo tuttavia che in situazioni molto generali il nucleo si «contrae» alla soluzione concorrenziale. Pertanto il meccanismo standard di prezzo risolve il problema [si veda in proposito Hildenbrand e Kirman 1988].

Ma anche nelle grandi economie i prezzi sono manipolabili. Quindi il nucleo riveste tuttora interesse, come del resto il valore di Shapley.

Un'ulteriore obiezione, e cioè che il numero delle coalizioni è troppo alto nei giochi estesi e che queste non si possono tutte formare, può essere facilmente smentita.

In effetti i risultati standard di convergenza si dimostrano validi anche se il numero delle coalizioni è piccolo [per una spiegazione di ciò si veda Mas-Colell 1978]. Supponiamo che le persone si incontrino casualmente con probabilità $P(n)$ dove n è il numero degli individui.

Supponiamo inoltre che si ammetta la formazione solo di quelle coalizioni i cui membri si sono incontrati. Anche in questo caso le uniche soluzioni di nucleo in grandi economie, cioè le sole allocazioni alle quali nessuna delle nostre (limitate) coalizioni può eccepire, saranno quelle concorrenziali³. Questo risultato è valido se la probabilità di incontro fra gli individui è maggiore di $1/\log n$.

Perciò per il genere di soluzioni cooperative che abbiamo trattato relativamente poche coalizioni sono veramente necessarie.

³ Per una panoramica completa si veda Kirman, Oddon e Weber [1986].

5. Conclusioni

Il fine di questo lavoro è stato quello di mostrare come certi problemi pratici, che sono difficilmente trattabili con la teoria economica standard, trovano una soluzione soddisfacente con l'impiego della teoria dei giochi cooperativi. Queste soluzioni godono di proprietà chiare, ben definite e interpretabili economicamente.

In conclusione, aggiungiamo due osservazioni conclusive. In primo luogo gli esempi forniti si basano entrambi su concetti tratti dalla teoria dei giochi cooperativi, che tuttora riveste un ruolo di sottordine in economia.

In secondo luogo, e paradossalmente, proprio quelle nozioni che sembravano inizialmente più astruse e tecniche si sono rivelate suscettibili di immediato uso pratico.

Riferimenti bibliografici

- Aumann, R. J. (1985), *What is Game Theory Trying to Accomplish?*, in *Frontiers of Economics*, a cura di K. J. Arrow e S. Honkapohja, Oxford e New York, Basil Blackwell.
- Billera, L. J., Heath J., e Raanan, D. C. (1978), *Internal Telephone Billing Rates: A Novel Application of Non-Atomic Game Theory*, *Oper. Res.*, 27, 956-965.
- Debreu, G. e Scarf, H. E. (1963), *A Limit Theorem on the Core of an Economy*, in «*International Economic Review*», 4, 235-246.
- Edgeworth, F. Y. (1881), *Mathematical Physics*, London, Kegan Paul.
- Harsanyi, J. C. (1959), *A Bargaining Model for the Cooperative n-Person Game*, in *Contributions to the Theory of Games IV*, a cura di Tucker, A. W. e Luce, R. D., Princeton, Princeton University Press.
- Hildenbrand, W. (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton, Princeton University Press.
- Hildenbrand, W. e Kirman, A. P. (1988), *Equilibrium Analysis*, Amsterdam, North-Holland.
- Kirman, A. P., Oddou, C. e Weber, S. (1986), *Stochastic Communication and Coalition Formation*, in «*Econometrica*», gennaio.
- Littlechild, S. C. e Thompson, G. F. (1977), *Airport Landing Fees: A Game Theoretic Approach*, in «*Bell Journal of Economics*», 8, 164-204.
- Mas-Colell, A. (1978), *A Note on the Core Equivalence Theorem: How Many Blocking Coalitions are there?*, in «*Journal of Mathematical Economics*», 5, 207-215.
- Mirman, L. J. e Tauman, Y. (1982), *Demand Compatible Equitable Cost Sharing Prices*, in «*Mathematics of Operations Research*», vol. 7, no. 1, 40-56.
- Rubinstein, A. (1988), *Comments on the Interpretation of Game Theory*, L.S.E. Discussion Paper no. TE/88/181.

Shapley, L. (1969), *Utility Comparison and the Theory of Games*, in *La Décision, Aggregation et Dynamique*, a cura di G. Th. Guilbaud, Colloques Internationaux du Centre de la Recherche Scientifique no. 171, Editions C.N.R.S.

Von Neumann, J. e Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.