

6. L'analisi qualitativa della struttura logica dei modelli econometrici

di Manfred Gilli

1. Introduzione

Le proprietà logiche di un sistema di equazioni possono essere validamente ed efficacemente analizzate col ricorso a strumenti propri della teoria dei grafi. La conoscenza di dette proprietà può assumere un particolare rilievo sia per il costruttore che per l'utente del modello, in quanto le stesse sono rivelatrici dell'architettura globale del sistema. Infatti, mentre da un lato i risultati ottenuti per questa via possono consentire di meglio formulare giudizi e valutazioni sulle caratteristiche strutturali e, di riflesso, sulle potenzialità operative del modello, dall'altro una esplicitazione delle proprietà all'oggetto può rivelarsi uno strumento prezioso per individuare eventuali aspetti lacunosi o comunque carenti della specificazione.

L'approccio qualitativo all'analisi delle strutture causali dei modelli – peraltro frequentemente integrato da appropriate analisi di simulazione statica e dinamica – viene così ad assumere un ruolo determinante ai fini di una corretta comprensione delle complesse interazioni che caratterizzano i modelli macroeconomici.

2. L'interpretazione del modello come grafo

Si consideri la parte deterministica di un modello in forma strutturale, rappresentata dall'insieme di n equazioni:

$$[1] \quad y = g(y, z)$$

con $y \in R^n$; vettore delle variabili endogene, e $z \in R^m$, vettore delle esogene. La struttura logica o causale del modello è deducibile dall'esame delle variabili che figurano a secondo membro di ciascuna equazione del modello. Data la generica equazione:

$$[2] \quad y_i = g_i(\dots, y_j, \dots, z_k, \dots)$$

diremo che è operante un legame causale dalla variabile y_j alla variabile y_i e analogamente che è operante un legame causale dalla varia-

bile z_k alla variabile y_i . I relativi nessi causali possono essere semplicemente rappresentati tramite degli schemi a frecce (cfr. figura 1) che vengono formalmente indicati col termine di «grafi».

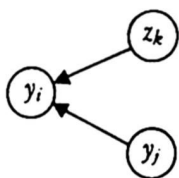


FIG. 1. Sottografo dell'equazione g_i .

Mentre uno schema a frecce è propriamente solo una rappresentazione grafica, un grafo è un concetto matematico caratterizzato da precise definizioni e da specifiche proprietà, il che consente di affrontare l'analisi delle strutture causali del modello con un linguaggio rigoroso e con strumenti metodologici appropriati.

Nel seguito guarderemo alla struttura causale del modello ricorrendo al grafo associabile alla stessa e deriveremo alcune delle proprietà strutturali del modello analizzando le proprietà del grafo corrispondente.

La versione lineare o linearizzata del modello [1] può essere convenientemente scritta come:

$$[3] \quad y = Dy + Fz$$

avendo indicato con D ed F le matrici:

$$[4] \quad D = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad F = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

In forma ridotta il modello 3 si scriverà come:

$$[5] \quad y = (I - D)^{-1} Fz.$$

Come è noto, le matrici di incidenza associate alle matrici D ed F contengono tutte le informazioni riguardanti la struttura causale del modello. Nel seguito deriveremo le matrici di incidenza associate rispettivamente alla matrice inversa $^1 (I - D)^{-1}$ e alla matrice dei moltiplicatori $(I - D)^{-1} F$.

¹ La matrice $(I - D)^{-1}$ è talvolta chiamata matrice dei «moltiplicatori di slittamento» (shift multipliers) in quanto mostra l'effetto indotto sulle variabili endogene da una variazione intervenuta in una data variabile endogena.

Il grafo completo associato al modello [1] è ottenuto dall'unione di tutti i sottografi corrispondenti alle diverse equazioni (cfr. figura 1). Al riguardo, consideriamo l'insieme $X = Z \cup Y$ formato da tutte le variabili del modello, e introduciamo la matrice composta A , associata all'insieme X e partizionata conformemente ai sottoinsiemi Z e Y :

$$[6] \quad A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Z & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & D \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

La matrice A sopra definita costituisce la matrice di adiacenza del grafo:

$$[7] \quad G = (X, U)$$

che rappresenta la struttura causale del modello [3].

L'unione $X = Z \cup Y$ costituisce l'insieme dei vertici e corrisponde al complesso delle variabili endogene ed esogene, mentre U rappresenta l'insieme di tutti gli archi $x_i \rightarrow x_j$ esistenti nel grafo. Ad ogni arco corrisponde un elemento non nullo della matrice di adiacenza A precedentemente definita.

Alcuni concetti addizionali ed utili per la successiva analisi, possono essere meglio illustrati ricorrendo ad un semplice esempio. Consideriamo allo scopo un modello di sette equazioni, caratterizzato dalla seguente struttura causale:

$$[8] \quad \begin{aligned} x_1 &= g_1(x_2, x_3, x_4, x_7) \\ x_2 &= g_2(x_7, x_{9-1}) \\ x_3 &= g_3(x_6, x_9) \\ x_4 &= g_4(x_7, x_{9-1}) \\ x_6 &= g_6(x_1, x_3, x_4, x_{8-1}) \\ x_7 &= g_7(x_2, x_5, x_{3-1}) \\ x_8 &= g_8(x_5, x_7, x_9). \end{aligned}$$

Al fine di semplificare la notazione nel seguito si indicheranno le variabili solo con gli indici numerici che le definiscono. Facendo riferimento alle sole endogene correnti, il grafo della struttura causale del modello e la matrice di adiacenza possono essere rappresentate come illustrato dalla figura 2.

Ogni arco del grafo corrisponde ad un legame causale presente nel modello. Una sequenza di archi distinti che va da un vertice i ad un vertice j costituisce un cammino. Ogni cammino corrisponde ad un legame causale indiretto del modello, in quanto sta ad indicare

$A =$

	5	9	1	2	3	4	6	7	8
5	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	.	.	1	1	1	.	1	.
2	.	.	.	.	.	.	.	1	.
3	.	1	.	.	.	.	1	.	.
4	.	.	.	.	.	.	.	1	.
6	.	.	1	.	1	1	.	.	.
7	1	.	.	1	.	.	.	.	.
8	1	1	.	.	.	.	.	1	.

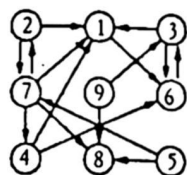


FIG. 2. Matrice di adiacenza e grafo associati al modello [8].

che una variabile i ha effetto su una variabile j solo per il tramite di altre variabili e quindi di un insieme di equazioni².

Fatte queste premesse, passiamo a ricercare i sottoinsiemi simultanei del modello, che denomineremo blocchi. Nella terminologia della teoria dei grafi, ciò equivale ad individuare le componenti forti, ovvero gli insiemi di dimensione massima costituiti da vertici interdipendenti³. Le componenti forti definiscono in modo univoco una suddivisione delle equazioni del modello in sottoinsiemi di equazioni simultanee. La ricerca delle componenti forti di un grafo può essere condotta oggi giorno tramite degli algoritmi efficienti [si veda Tarjan 1972]. In particolare si può seguire la procedura qui di seguito indicata.

i) Si cerca l'insieme $R(x_0)$ delle variabili connesse direttamente o indirettamente ad una data variabile prefissata x_0 attraverso archi in uscita da x_0 . $R(x_0)$ è denominato insieme dei vertici discendenti rispetto al vertice x_0 .

ii) Si ricerca l'insieme $Q(x_0)$ delle variabili presenti lungo tutti i cammini diretti verso una variabile prefissata x_0 . $Q(x_0)$ è denominato insieme dei vertici ascendenti rispetto al vertice x_0 .

iii) Si determina l'intersezione $R(x_0) \cap Q(x_0)$ e si definisce così facendo l'insieme dei vertici che costituiscono la componente forte a cui appartiene x_0 .

iv) Si eliminano i vertici della componente forte così trovata dal grafo $G = (X, U)$ e si ripete la procedura con riferimento al sottografo residuo.

A titolo di esempio, con riferimento alla fig. 2, ricerchiamo la componente forte a cui appartiene il vertice 2. L'insieme $R(2)$ può

² La presenza di legami causali, diretti o indiretti, nel modello equivale all'esistenza di moltiplicatori non nulli.

³ Detti insiemi sono cioè caratterizzati dalla proprietà che ad ogni coppia ordinata di vertici (i, j) è associato un duplice cammino da i a j e da j a i .

essere agevolmente determinato costruendo un albero avente per radice il vertice all'oggetto. Al primo livello dell'albero si trovano tutti i vertici adiacenti al vertice 2. Al secondo livello, i vertici adiacenti a quelli corrispondenti al primo livello e così via. Si giunge così facendo ad individuare il complesso dei vertici discendenti rispetto al vertice in esame. L'insieme $Q(2)$ può essere determinato con una procedura sostanzialmente analoga procedendo in senso inverso.

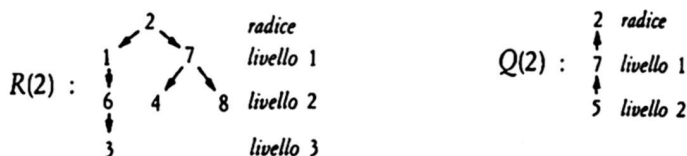


FIG. 3. Alberi completi corrispondenti agli insiemi $R(2)$ e $Q(2)$.

Si constata agevolmente come $R(2) \cap Q(2) = \{2, 7\}$: detto insieme rappresenta una componente forte del grafo⁴.

Una volta identificate le parti interdipendenti del modello, proponiamoci di individuare le relazioni causali che intercorrono tra le stesse. A tal fine introdurremo un nuovo grafo i cui vertici sono costituiti dalle componenti forti del grafo originario ed i cui archi riflettono l'esistenza di un arco nel grafo originario tra almeno una coppia di vertici costituenti le componenti forti interessate. Questo nuovo grafo è denominato grafo *ridotto* e consente di analizzare le relazioni causali tra blocchi, ovvero tra i sottoinsiemi di equazioni simultanee del modello.

Ritornando all'esempio precedentemente considerato, il relativo grafo ridotto è indicato in figura 4.

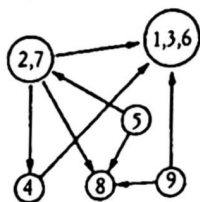


FIG. 4. Grafo ridotto del modello [8].

Per costruzione, il grafo ridotto non contiene circuiti, ovvero è privo di interdipendenze: ne consegue che risulta sempre possibile

⁴ Le altre componenti forti risultano essere $\{1, 3, 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9\}$. Si osservi altresì come anche un singolo vertice possa rappresentare una componente forte.

dotare i vertici del grafo ridotto di un ordinamento gerarchico tale per cui gli archi risultano orientati esclusivamente dall'alto verso il basso.

Nel grafo riordinato a livello zero si collocano i vertici che hanno un grado di entrata nullo (nel nostro caso i vertici 5 e 9). Eliminando tali vertici dal grafo originale, si dà luogo a nuovi vertici senza archi in entrata, detti di livello uno⁵. Ripetendo il procedimento fino all'esaurimento dei vertici si giunge al grafo (ridotto) ordinato, come esemplificato in figura 5.

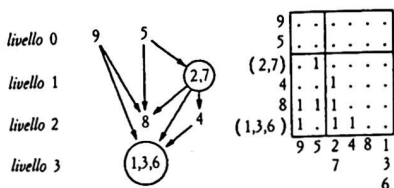


FIG. 5. Grafo ridotto ordinato e matrice di adiacenza.

Al livello zero del grafo ridotto ordinato si collocano le variabili esogene del modello: i vertici corrispondenti a dette variabili non presentano ovviamente alcun arco in entrata. Da ispezione del grafo, si constata agevolmente come i blocchi di variabili appartenenti ai livelli di ordine superiore, risultino essere influenzati dai blocchi collocati ai livelli di ordine inferiore. A seguito del riordinamento delle variabili corrispondenti alle righe e alle colonne della matrice di incidenza D in conformità con la sequenza con cui le stesse figurano nei successivi livelli del grafo ridotto ordinato, si perviene alla rappresentazione della matrice D in forma triangolare a blocchi come illustrato nella figura 6 sottostante.

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{|cccccc|} \hline 2 & . & 1 & & & \\ 7 & 1 & . & & & \\ 4 & . & 1 & . & & \\ 8 & . & 1 & . & . & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & . \\ 3 & . & . & . & . & . & 1 \\ 6 & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ \hline & 2 & 7 & 4 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

FIG. 6. Forma triangolare a blocchi della matrice di incidenza D .

⁵ Nel nostro esempio il vertice associato alla componente forte $\{2, 7\}$ corrisponde al livello uno.

Introduciamo ora la nozione di matrice di *raggiungibilità* C (cfr. figura 7) del grafo ridotto. Il generico elemento c_{hk} della matrice è non nullo se e solo se esiste un cammino che congiunge il vertice k al vertice h nel grafo ridotto associato: in particolare l'elemento c_{hk} è posto uguale a uno se i vertici h e k sono uniti da un arco ed è posto uguale ad «i» ogniqualvolta fra i vertici suddetti esiste un cammino di lunghezza superiore a uno. Gli elementi contrassegnati con «i» sono pertanto indicativi dell'esistenza nel modello di legami causali indiretti fra coppie di blocchi. Gli elementi nella matrice indicati con un puntino sono nulli. Gli elementi superdiagonali di C e quelli collocati nelle righe iniziali – corrispondenti alle variabili esogene – possono venire ignorati in quanto nulli per costruzione.

Il blocco rettangolare residuo corrisponde alla matrice di incidenza della matrice dei moltiplicatori ed il blocco triangolare annesso corrisponde alla matrice di incidenza associata alla matrice dei cosiddetti moltiplicatori di slittamento (che rispecchiano i legami causali operanti fra le endogene del modello).

$$C = \begin{matrix} & (2,7) & & & & & & & & \\ & 4 & & & & & & & & \\ & 8 & & & & & & & & \\ (1,3,6) & & & & & & & & & \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & 1 & & & & & \\ \hline \bullet & i & 1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \bullet & & & \\ \hline 1 & i & 1 & 1 & \bullet & & \\ \hline \end{array} \begin{matrix} 9 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ & & 7 & & & 3 \\ & & & & & 6 \end{matrix}$$

FIG. 7. Matrice di raggiungibilità C .

La matrice di *raggiungibilità* è importante in quanto consente di mettere in evidenza le strutture logiche del modello⁶.

In molte circostanze può essere rilevante l'essere in grado di operare con sottomodelli. Il problema che sorge in questi casi è come sia possibile individuare i sottomodelli in modo tale da pervenire alle stesse conclusioni a cui condurrebbe l'esame del modello completo. L'idea sottostante è alquanto semplice e si basa sull'eliminazione di tutte le variabili che non risultano legate da nessi causali con una variabile prefissata. Questo problema è noto come problema della separabilità del modello.

Grazie alla matrice di raggiungibilità è in effetti possibile dare una risposta a quesiti di rilevante interesse, quali:

⁶ Ai fini dell'utilizzo finale del modello, si noti altresì come la possibilità o meno di simulare una particolare politica può essere direttamente verificata in base all'esistenza dell'appropriato moltiplicatore nella matrice C .

i) Per un dato blocco i , trovare l'insieme minimale di blocchi che contengono i e la cui soluzione può essere condotta prescindendo dal resto del modello: l'insieme all'oggetto si identifica col gruppo di blocchi che presentano elementi non nulli nella riga i -esima della matrice C . Nel grafo ridotto esso si identifica col complesso di vertici ascendenti rispetto al vertice i , corrispondente al blocco omonimo⁷.

ii) Individuare l'insieme delle variabili che risultano alterate a seguito di una variazione apportata ad una variabile del blocco i -esimo: detto insieme è rappresentato dai vertici discendenti verso il vertice i nel grafo ridotto e corrisponde all'insieme di blocchi caratterizzati da elementi non nulli nella colonna i -esima della stessa matrice C ⁸.

iii) Individuare l'insieme da esaminare per valutare l'effetto di una perturbazione del blocco i su uno specifico blocco j : detto insieme corrisponde all'insieme dei vertici collocati lungo i cammini orientati che vanno dal blocco i al blocco j e si identifica quindi con l'intersezione dell'insieme dei vertici discendenti del vertice i -esimo, con l'insieme dei vertici ascendenti del vertice j -esimo⁹.

3. Elementi essenziali di una struttura causale

3.1. Strutture ricorsive

In molti casi può essere rilevante precisare quali relazioni causali svolgono un ruolo essenziale nel modello. Prendendo l'avvio dal grafo ridotto associato al modello, l'obiettivo suddetto può essere conseguito individuando il cosiddetto grafo minimale, ovvero il più piccolo fra tutti i sottografi caratterizzati dalla stessa matrice di *raggiungibilità* del grafo di partenza. Tale grafo minimale risulta essere unico.

La determinazione del grafo minimale può avvenire tramite la soppressione dal grafo ridotto degli archi fra coppie di vertici che verificano un cammino di lunghezza superiore ad uno. Il grafo ridotto dell'esempio è rappresentato nella figura 8, distinguendo fra archi che formano il grafo minimale – indicati con un tratto continuo – e archi che possono essere rimossi – rappresentati da linee tratteggiate. La matrice di raggiungibilità viene modificata di conseguenza, indicando con «b» (simbolo utilizzato per i legami corrispondenti ai cosiddetti archi di base) gli elementi che rappresentano gli archi del

⁷ Nel grafo precedentemente considerato, ad esempio, l'insieme dei vertici ascendenti $Q(1)$ è dato dall'insieme $\{1, 3, 6, 4, 2, 7, 5, 9\}$.

⁸ Ad esempio l'insieme dei vertici discendenti rispetto a $Q(9)$ è dato dall'insieme $\{9, 8, 1, 3, 6\}$.

⁹ A titolo di esempio l'effetto della variabile 9 sulla variabile 1 è desumibile dall'esame dell'insieme $R(9) \cap Q(1) = \{1, 3, 6, 9\}$.

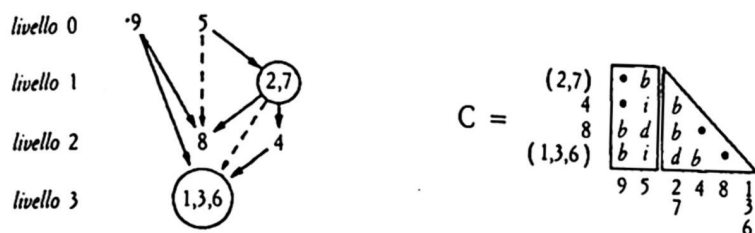


FIG. 8. Grafo minimale (linee continue).

grafo minimale e con «d» (simbolo utilizzato per i legami corrispondenti ai cosiddetti archi diretti) gli elementi che rappresentano i rimanenti archi.

La matrice così ottenuta mette in evidenza le relazioni causali operanti fra i blocchi. L'eliminazione di un legame di tipo causale del modello equivale alla soppressione di archi del grafo minimale, cioè degli archi contrassegnati con la lettera «b» (cfr. fig. 8). A seguito della rimozione di un legame designato con la lettera «d», i blocchi coinvolti rimarranno comunque connessi tra loro. Simmetricamente, l'inserimento di un ulteriore legame causale equivale all'inserimento di un arco, il che comporta la sostituzione di un elemento precedentemente fissato a zero nella matrice C con un elemento non nullo.

Infine, l'inserimento di un legame tra blocchi già uniti da una relazione di tipo indiretto, indicato con il simbolo «i» nella matrice C , avrà solo l'effetto di rafforzare un legame già esistente tra gli stessi.

3.2. Strutture interdipendenti

Ogni blocco, o struttura interdipendente, è caratterizzato dalla esistenza di legami causali (indiretti o diretti) tra ciascuna coppia di variabili appartenenti al blocco. Le variabili del blocco risultano cioè collegate tramite catene causali chiuse, denominate circuiti. Si dimostra che il numero di circuiti elementari, cioè dei circuiti che non attraversano più di una volta una stessa variabile, risultano facilmente dell'ordine di centinaia di migliaia anche per modelli di modeste dimensioni. Ciò si traduce inevitabilmente in difficoltà interpretative. Al fine di consentire una comprensione globale dei meccanismi di interdipendenza, una strategia valida è costituita dalla ricerca degli elementi che sono responsabili della circolarità dei legami causali del blocco. A seguito della eliminazione di questi elementi si perviene ad una struttura ricorsiva, la cui analisi può essere condotta con le tecniche messe a punto per lo studio dei grafi ridotti. Gli insiemi degli elementi a cui guardare possono essere rappresentati:

- a) o dall'insieme dei vertici associati alle variabili che, singolarmente o a gruppi, interessano tutti i circuiti del blocco;
 b) o dall'insieme degli archi corrispondenti a legami causali che, singolarmente o a gruppi, compaiono in ogni circuito.

È evidente che risultano essere di primario interesse gli insiemi minimali di elementi che sono in grado, qualora vengano rimossi, di interrompere tutti i circuiti.

L'insieme di cui al punto a) sopra è detto insieme dei vertici retroattivi e l'insieme di cui al punto b) insieme degli archi retroattivi. Riferendoci per comodità espositiva al blocco costituito dalle variabili $\{1, 3, 6\}$, vediamo come si possono determinare gli insiemi sopracitati¹⁰. La figura 9 mostra il grafo del blocco ed evidenzia tutti i circuiti elementari. I circuiti elementari all'oggetto possono essere rappresentati tramite due grafi cosiddetti bipartiti¹¹. In ciascuno dei due grafi suddetti l'insieme dei vertici viene suddiviso in due sottoinsiemi. I vertici appartenenti al primo sottoinsieme rappresentano, in entrambi i grafi bipartiti, i circuiti del blocco; i vertici appartenenti al secondo sottoinsieme rappresentano invece, rispettivamente, in un grafo le variabili e nell'altro gli archi del blocco. In ambo i grafi, si procede quindi a congiungere con uno spigolo le variabili e gli archi con i rispettivi circuiti di appartenenza. Si procede quindi ad individuare in entrambi i grafi bipartiti gli elementi, variabili o archi, che appaiono in tutti i circuiti.

Per il grafo bipartito 1 si constata agevolmente che sia la variabile 3 che la variabile 6 compaiono in tutti i circuiti: pertanto ciascuna di

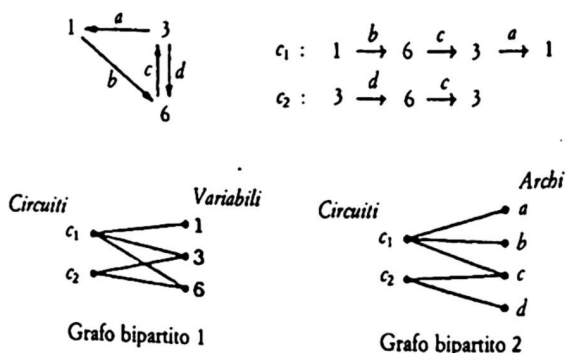


FIG. 9. Blocco $\{1,3,6\}$, insieme dei circuiti elementari e grafi bipartiti.

¹⁰ Un algoritmo efficiente è descritto in Gilli e Rossier [1981].

¹¹ Un grafo si dice bipartito se l'insieme dei vertici può essere suddiviso in due sottoinsiemi tali che tutti gli spigoli abbiano un vertice nel primo insieme e l'altro vertice nel secondo insieme.

esse costituisce un insieme di vertici retroattivi essenziali per il blocco $\{1, 3, 6\}$.

Nel grafo bipartito 2 l'arco $6 \rightarrow 3$ è comune a tutti i circuiti e si identifica pertanto con l'insieme degli archi essenziali retroattivi¹².

Al fine di spezzare le catene causali chiuse del blocco, ci si può riferire ad esempio, al vertice essenziale retroattivo associato alla variabile 6. Scindendo infatti detto vertice nel blocco in due parti, di cui l'una contiene solo gli archi in uscita dal vertice e l'altra solo gli archi in entrata, si eliminano i circuiti dal blocco. Analogamente, rimuovendo l'arco $6 \rightarrow 3$, che identifica l'insieme degli archi retroattivi essenziali, risultano automaticamente eliminati tutti i circuiti del blocco. In figura 10 sono rappresentati i grafi ricorsivi a cui si perviene (conformandoci alle precedenti convenzioni notazionali, gli archi a tratto continuo corrispondono al grafo minimale, i rimanenti archi sono indicati con un tratto discontinuo). Per completezza è stato altresì introdotto l'arco di retroazione, rappresentato dalla linea punteggiata.

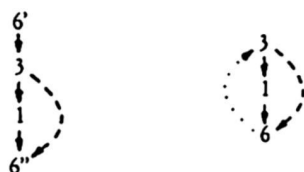


FIG. 10. Rappresentazioni ricorsive associate al blocco $\{1, 3, 6\}$.

La configurazione delle matrici di incidenza dei grafi ricorsivi summenzionati aventi gli elementi disposti lungo le righe e le colonne secondo l'ordine dei vertici, dall'alto verso il basso, è illustrata in figura 11. La sottomatrice V è formata dai vertici essenziali retroattivi e la matrice triangolare A dagli archi essenziali retroattivi.

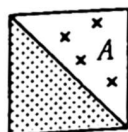
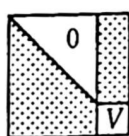


FIG. 11. Struttura delle matrici di incidenza a seguito del riordinamento.

L'ordinamento delle equazioni di un blocco interdipendente conformemente alla configurazione indicata si dimostra particolarmente

¹² L'insieme degli archi $\{a, d\}$, per esempio, forma un insieme minimale di archi retroattivi la cui cardinalità, tuttavia, non è minima.

conveniente in fase di risoluzione numerica del modello. Qualora si ricorra a metodi di tipo Gauss-Seidel, si osserva che il loro funzionamento è spesso ottimo, se si risolvono le equazioni in conformità con l'ordine gerarchico che risulta dal grafo ottenuto a seguito della rimozione degli archi retroattivi [si veda Pauletto, 1990].

4. Estensioni dell'analisi

4.1. Modelli senza normalizzazione esplicita

I modelli sinora considerati erano dotati di una regola di normalizzazione esplicita. Questo faceva sì che le equazioni del modello ammettessero una rappresentazione della forma:

$$[9] \quad x_i = g_i(\dots, x_j, \dots) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

cioè tale che ad ogni equazione potesse venire univocamente associata una variabile dipendente, specificata al primo membro. In questo caso, il grafo della struttura causale del modello è, come abbiamo visto, ottenibile in modo diretto e immediato.

Per converso, qualora non esista un particolare ordine di normalizzazione (ovvero di specificazione a priori delle variabili che debbono figurare al primo membro delle equazioni), ci si deve innanzitutto chiedere se una rappresentazione del tipo sopra considerato sia ammissibile. La questione è rilevante per le implicazioni relative alle proprietà del modello.

Affronteremo quindi, qui di seguito, il problema di come associare un grafo ad un sistema di equazioni non normalizzato del tipo:

$$[10] \quad h_i(y, z) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tale sistema può essere interpretato come un grafo non orientato bipartito, formalmente esprimibile come:

$$[11] \quad G_0 = (H, X, E)$$

in cui H rappresenta l'insieme delle relazioni del modello, $X = Z \cup Y$ l'insieme delle variabili ed $E = \{[b_i, x_j] \mid x_j \text{ compare nell'equazione } b_i\}$ l'insieme degli spigoli.

La matrice di adiacenza di G_0 è data da:

$$[12] \quad A_{G_0} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & D & F \\ \hline D' & & \\ F' & 0 & \end{array} \right]$$

dove F rappresenta la matrice di incidenza associata alla matrice jacobiana $\frac{\partial h}{\partial z'}$ e D la matrice di incidenza associata alla matrice jacobiana $\frac{\partial h}{\partial y'}$.

A questo livello siamo già in grado di analizzare una proprietà rilevante del modello. Assumendo, come si fa abitualmente, che il modello sia completo almeno localmente, cioè che il modello possieda una soluzione unica per y in un intorno di z , si desume facilmente, col ricorso ai risultati classici del teorema delle funzioni implicite, che il determinante della matrice jacobiana $\frac{\partial h}{\partial y'}$ deve essere non nullo in un intorno di z .

Passiamo quindi a considerare il determinante della matrice D sopra definita. Detto determinante può essere espresso nella forma

$$[13] \quad |D| = \sum_{p \in P(n)} s(p) \prod_{i=1}^n d_{ip_i}$$

avendo indicato con d_{ip_i} l'elemento generico della matrice D , con $P(n)$ l'insieme delle $n!$ permutazioni dei primi n interi, con p_i la i -esima componente della permutazione p e con s una funzione che assume valore 1 se la permutazione è pari e -1 se è dispari. Si desume agevolmente che una condizione necessaria affinché $|D| \neq 0$ è data dalla esistenza di almeno una permutazione p in corrispondenza alla quale il prodotto che appare nella [13] risulti diverso da zero.

Posto che $|D| \neq 0$, sarà possibile stabilire il seguente insieme di relazioni di corrispondenza:

$$[14] \quad W = \{[h_i, y_j] \mid h_i \text{ contiene } y_j\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La [14] definisce un sistema completo di abbinamenti (o *matching*) tra l'insieme delle relazioni H e l'insieme delle variabili endogene Y . Si può conseguentemente procedere ad orientare gli spigoli nel grafo bipartito G_0 da H a X , nel senso che l'esistenza dell'arco $h_i \rightarrow y_j$ sta a significare che la relazione h_i spiega la variabile y_j . L'orientamento degli spigoli dell'insieme differenza, $E - W$, va da X a H , associando all'arco $x_j \rightarrow h_i$ il significato che la variabile x_j svolge un ruolo esplicativo nella relazione h_i . Come risultato finale si ottiene un grafo esprimibile come:

$$[15] \quad G_1 = (H, X, T)$$

dove T rappresenta l'insieme di archi definito dalla relazione:

$$[16] \quad T = \{(h_i, x_j) \mid [h_i, x_j] \in W\} \cup \{(x_j, h_i) \mid [h_i, x_j] \in E - W\}.$$

Nel grafo G_1 i vertici h_i, x_j che formano gli archi appartenenti all'insieme W , possono essere compattati in modo da pervenire al grafo $G = (X, U)$ precedentemente introdotto (cfr. formula [7] sopra).

Qualora risulti impossibile individuare una relazione di corrispondenza fra equazioni e variabili ai sensi della [14], la matrice jacobiana $\frac{\partial h}{\partial y'}$, è detta qualitativamente singolare: detta matrice risulta infatti, in tal caso, degenerare a prescindere dai valori numerici che vengono attribuiti ai suoi elementi non nulli. Va notato che per un sistema del tipo [10] non esiste un'unica possibilità di definire un insieme di abbinamenti equazioni-variabili ai sensi della [14], salvo che nel caso di struttura ricorsiva.

Ad ogni insieme di abbinamenti corrisponde ovviamente un diverso schema causale all'interno delle componenti forti; peraltro, l'insieme delle componenti forti, nonché il grafo ridotto, risultano invarianti rispetto alle possibili scelte dell'insieme di abbinamenti.

4.2. I modelli dinamici

La presenza di variabili endogene ritardate tra le esplicative si traduce in legami causali tra variabili diversamente datate. Al fine di analizzare i legami causali esistenti tra variabili ritardate e variabili correnti, si può procedere in modo analogo a quello visto in precedenza con riferimento al caso statico. Formalmente si tratta di specificare un appropriato modello statico allargato, corrispondente al modello di partenza. Consideriamo a scopo illustrativo, il caso di un modello dinamico con variabili ritardate di un solo periodo i.e.:

$$[17] \quad y_t = g_t(y_t; y_{t-1}, z_t).$$

Scriviamo il sistema per tre periodi successivi:

$$\begin{aligned} y_{t+0} &= g_{t+0}(y_{t+0}; y_{t-1}, z_{t+0}) \\ y_{t+1} &= g_{t+1}(y_{t+1}; y_{t+0}, z_{t+1}) \\ y_{t+2} &= g_{t+2}(y_{t+2}; y_{t+1}, z_{t+2}). \end{aligned}$$

Introducendo il vettore composto $y^* = [y'_{t+0} \ y'_{t+1} \ y'_{t+2}]'$ e il vettore composto $z^* = [z'_{t+0} \ z'_{t+1} \ z'_{t+2}]'$ le tre equazioni si possono rappresentare formalmente come un modello statico del tipo:

$$[18] \quad y^* = g^*(y^*; z^*).$$

Le relazioni temporali vengono, così facendo, ricondotte a relazioni causali operanti tra variabili del sottoinsieme y_{t+0} , variabili del sottoinsieme y_{t+1} e variabili del sottoinsieme y_{t+2} .

Alla luce di queste premesse, si può procedere agevolmente all'analisi lungo la strada precedentemente tracciata: si associa un grafo G^* al modello, se ne ricercano le componenti forti e si costruisce la matrice C^* dei legami causali. La struttura della matrice C^* risulterà del tipo:

$$[19] \quad C^* = \begin{matrix} t+0 \\ t+1 \\ t+2 \end{matrix} \begin{bmatrix} C & & \\ C_1 & C & \\ C_2 & C_1 & C \end{bmatrix}$$

avendo indicato con C la matrice che specifica le relazioni causali tra blocchi riferiti ad uno stesso periodo, con C_1 la matrice che traduce i legami causali tra i blocchi di due periodi successivi e con C_2 la matrice che traduce i legami causali tra i blocchi del periodo $t+0$ e quelli del periodo $t+2$.

In figura 12 è mostrato il grafo ridotto che risulta dal grafo G^* relativo all'esempio precedentemente considerato.

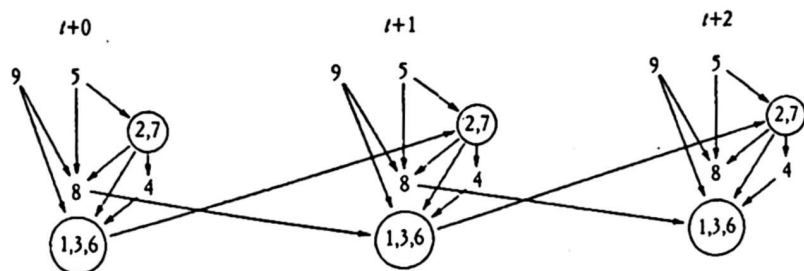


FIG. 12. Grafo ridotto associato al grafo G^* .

Le matrici C_1 e C_2 che corrispondono al grafo ridotto della figura 12 sono riprodotte in figura 13. Si osservi come, facendo riferimento ad un orizzonte temporale che interessa tre periodi consecutivi, il modello dinamico all'oggetto assume un carattere totalmente interdipendente.

$$C_1 = \begin{matrix} (2,7) \\ 4 \\ 8 \\ (1,3,6) \end{matrix} \begin{bmatrix} d & i & i & i & b \\ d & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & b \\ i & i & i & i & i \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{matrix} (2,7) \\ 4 \\ 8 \\ (1,3,6) \end{matrix} \begin{bmatrix} i & i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i & i \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 9 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ & & 7 & & & 3 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 9 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ & & 7 & & & 3 \end{matrix}$

FIG. 13. Matrici C_1 e C_2 delle relazioni causali intertemporali.

pendente: ciò in quanto la matrice C_2 risulta avere tutti gli elementi uguali ad «i», il che sta ad indicare che esiste un legame causale (indiretto) tra ogni blocco relativo al periodo $t + 0$ ed ogni blocco relativo al periodo $t + 2$.

Riferimenti bibliografici

- Basmann, R. L. (1988), *Causality Tests and Observationally Equivalent Representations of Econometric Models*, in «Journal of Econometrics», Vol. 39, n. 1/2, pp. 69-104.
- Deleau, M. e Malgrange, P. (1978), *L'analyse des modèles macroéconomiques quantitatifs*, Paris, Economica.
- Don, H. e Gallo, G. M. (1987), *Solving Large Sparse Systems of Equations in Econometric Models*, in «Journal of Forecasting», Vol. 6, pp. 167-180.
- Faliva, M. (1990), *L'analisi dei modelli econometrici nell'ambito della teoria dei sistemi*, in questo stesso volume.
- Garbely, M. e Gilli, M. (1984), *Two Approaches in Reading Model Interdependencies*, capitolo 2 di *Analysing the Structure of Econometric Models*, a cura di Ancot J. P., Nijhoff, The Hague.
- Gilli, M. (1978), *Etude et analyse des structures causales dans les modèles économiques*, Berne, Peter Lang.
- (1984), *CAUSOR - A Program for the Analysis of Recursive and Interdependent Causal Structures*, in «Cahiers du Département d'Econométrie», n. 84.03, Université de Genève.
- Gilli, M. e Rossier, E. (1981), *Understanding Complex Systems*, in «Automatica», Vol. 17, n. 4, pp. 647-652.
- Gilli, M. e Shell, M. (1986), *Troll Program Causor (A Program for the Analysis of Recursive and Interdependent Causal Structures)*, Technical Report TR-45, Center for Computational Research in Economics and Management Science, Cambridge, MA, Massachusetts Institute of Technology.
- Krupp, R. (1976), *Interdependenz und Zerlegbarkeit ökonomischer Modelle*, in «Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik», febbraio.
- Kuh, E., Neese, J. W. e Hollinger, P. (1985), *Structural Sensivity in Econometric Models*, New York, Wiley.
- Lindbeck, A. (1966), *The Method of Isolation in Economic Statics - A Pedagogical Note*, in «The Swedish Journal of Economics», Vol. LXVIII, No 3, 148-165.
- McElroy, F. W. (1978), *A Simple Method of Causal Ordering*, in «International Economic Review», Vol. 19, n. 1, 1-23.
- Pauletto, G. (1990), *Techniques de résolution des modèles à équations multiples*, Mémoire de diplôme d'économetrie, Université de Genève.
- Roy, B. (1969), *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Vol. I, Paris, Dunod.
- Simon, H. A. (1957), *Causal Ordering and Identifiability*, capitolo terzo di *Studies in Econometric Methods*, a cura di Hood e Koopmans, Cowles Commission on Research 14, New York, Wiley.
- Tarjan, R. (1972), *Depth-first Search and Linear Graph Algorithms*, in «SIAM Journal of Computing», Vol. 1, pp. 146-160.