LA TEORIA DELL'EQUILIBRIO ECONOMICO GENERALE SECONDO VON NEUMANN*

I

PREMESSA

Il presente scritto si propone due scopi:

a) esporre la teoria dell'equilibrio economico generale secondo von Neumann, in modo da fornire al lettore italiano un testo che, sebbene assai lontano dalle complicazioni matematiche del testo originale di von Neumann, abbia tuttavia un grado sufficiente di compiutezza analitica;

b) definire l'esatta collocazione del modello di von Neumann nella storia del pensiero economico, attraverso un'esame delle difficoltà insite nelle precedenti formulazioni della teoria dell'equilibrio economico generale, sia nelle varianti di derivazione walrasiana sia in quelle di derivazione böhm-bawerkiana.

Nella preparazione del testo sono state largamente utilizzate le « dispense » delle lezioni tenute da chi scrive nei « Corsi di formazione e di specializzazione sui problemi della teoria e della politica dello sviluppo economico » presso la Svimez: di tali dispense il presente testo mantiene l'intenzione prevalentemente didattica. Per evitare un eccessivo numero di riferimenti nel corso dell'esposizione, si menzionano qui, una volta per tutte, gli scritti che sono stati maggiormente consultati:

— J. von Neumann, « Un modello di equilibrio economico generale », *L'Industria,* n. 1 del 1952 (si ricorda che la teoria di von Neumann, esposta oralmente nel 1932 a Princeton, fu pubblicata in tedesco nel 1937 e in inglese nel 1945).

— D.G. Champernowne, « Nota sull'articolo di von Neumann », *ibidem.*

— N. Georgescu-Roegen, « The aggregate linear production function and its applications to von Neumann's economic model » nel vol. *Activity analysis of production and allocation,* a cura di T.C. Koopmans, New York 1951.

— R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow, *Linear programming and economic analysis,* New York 1958, pp. 381-388.

— R.G.D. Allen, *Mathematical economics,* Londra 1959, pp. 600-607.

(*) Ringrazio il dr. Renzo Bianchi, il dr. Massimo Finoia e il dr. Domenico Tosato: le loro critiche e i loro consigli mi sono stati preziosi per la redazione del testo; resta naturalmente mia la responsabilità di quanto qui si sostiene.

— J.G. Kemeny, O. Morgenstern, G.L. Thompson, « A generalization of the von Neumann model of an expanding economy », *Econometrica,* aprile 1956.
— M. Morishima, « Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models », *Econometrica,* aprile 1960.
— D. Gale, « The closed linear model of production », nel vol. *Linear inequalities and related systems,* a cura di H.W. Kuhn e A.W. Tucker, Princeton 1956.
— D. Gale, *The theory of linear economic models,* New York 1960, pp. 310-318.

La dimostrazione dell'esistenza di soluzioni per il modello di von Neumann, che si troverà nel presente scritto, è, salvo alcune modifiche di carattere espositivo, quella elaborata da Gale.

II

IL MODELLO DI VON NEUMANN [1]

a) *Caratteristiche generali*

Il modello di von Neumann è un sistema di equilibrio economico generale, che differisce da quello tradizionale walrasiano per due principali ragioni:

1) Mentre il modello walrasiano si riferisce alla configurazione d'equilibrio di un singolo periodo, il modello di von Neumann si riferisce ad un equiibrio evolutivo che si svolge lungo una successione (illimitata) di periodi.

2) Il modello walrasiano è un modello « aperto », nel quale il processo economico parte da un complesso di risorse produttive date all'inizio del periodo che si considera (e che sono perciò risorse « originarie » o nel senso che non sono frutto di processi produttivi o nel senso che sono state prodotte in periodi non inclusi nel modello), si svolge mediante un insieme di atti di produzione e di scambio, e arriva a certe utilizzazioni « finali » (consumi e investimenti); è da notare che, in questo modello « aperto », il reddito che viene consumato o risparmiato-investito dagli utilizzatori finali proviene dalla vendita dei servizi delle risorse produttive originarie. Il modello di von Neumann, invece, è un modello « chiuso », nel quale non esistono né risorse originarie né usi finali: i fattori della produzione usati in un periodo non sono altro che i prodotti del periodo precedente, e i prodotti di un periodo non hanno altra utilizzazione che l'impiego come fattori nel periodo successivo. In questo quadro il « consumo » non è che l'impiego di certi beni per la produzione di lavoro.

Nel modello di von Neumann si prevede una tecnologia di tipo lineare, articolata in m processi produttivi, ognuno dei quali si svolge esat-

(1) Di regola non si farà uso del calcolo vettoriale e matriciale; potrà tuttavia essere talvolta conveniente l'indicare, con apposita simbologia, vettori e matrici; si farà allora uso di lettere in neretto, minuscole per i vettori e maiuscole per le matrici. Le lettere in carattere normale indicheranno dunque sempre quantità scalari.

tamente in un periodo, condizione alla quale ci si può sempre ridurre spezzando gli eventuali processi più lunghi in tanti processi di durata unitaria e considerando come particolari beni intermedi i beni che, nel passaggio da un periodo all'altro, sono in corso di produzione o di utilizzazione. In ognuno dei processi ciascuno degli n beni presenti nel sistema appare sia come fattore (*input*) che come prodotto (*output*) secondo coefficienti fissi positivi o nulli.

Indichiamo con: a_{ij} la quantità del bene i-mo usata come *input* nel processo j-mo quando tale processo venga esercitato a livello unitario;

b_{ij} la quantità del bene i-mo prodotta come *output* nel processo j-mo quando tale processo venga esercitato a livello unitario.

Abbiamo così una matrice degli *inputs* (denominata A) e una matrice degli *outputs* (denominata B):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{Vmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici ogni riga si riferisce ad un bene e ogni colonna a un processo. Gli m processi: $P_1, P_2, \dots, P_m$ si possono rappresentare nel seguente modo (Georgescu-Roegen):

$$P_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_{n1} \end{Vmatrix} \quad P_2 = \begin{Vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n2} & b_{n2} \end{Vmatrix} \quad , \dots , \quad P_m = \begin{Vmatrix} a_{1m} & b_{1m} \\ a_{2m} & b_{2m} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{nm} & b_{nm} \end{Vmatrix}$$

Sulle matrici A e B si fanno le seguenti ipotesi:

Ipotesi 1 : Ognuna delle colonne di A contiene elementi non tutti nulli (ciò significa che non è possibile produrre qualcosa dal nulla).

Ipotesi 2 : Ognuna delle righe di B contiene elementi non tutti nulli (ciò significa che ogni bene è il prodotto di qualche processo).

La tecnologia descritta dalle due matrici A e B può tenere perfettamente conto dei beni capitali durevoli. Un bene di questo tipo appare tanto come *input* quanto come *output*, con l'avvertenza che il coefficiente di *output* è minore del coefficiente di *input* in modo da tener conto del logorio che ha luogo durante un periodo.

Si indicano con $x_1, x_2, \dots, x_m$ (o con la notazione vettoriale $\mathbf{x}$) i livelli ai quali vengono rispettivamente esercitati i processi $P_1, P_2, \dots, P_m$. I periodi ai quali tali livelli si riferiscono vengono indicati con indici in alto; così x_i^t indica il livello al quale è esercitato il processo P_i nel periodo t. (Dato il carattere periodale dell'analisi si suppone naturalmente che i livelli restino costanti nell'ambito di ogni periodo e possano mutare solo nel passaggio da un periodo all'altro).

Ricordando che i fattori di un periodo sono i prodotti del periodo precedente, i vincoli imposti alla produzione dalla disponibilità dei fattori si esprimono come segue:

$$(1)\quad \begin{cases} b_{11}x_1^t + b_{12}x_2^t + \ldots + b_{1m}x_m^t \geqslant a_{11}x_1^{t+1} + a_{12}x_1^{t+1} + \ldots + a_{1m}x_m^{t+1} \\ b_{21}x_1^t + b_{22}x_2^t + \ldots + b_{2m}x_m^t \geqslant a_{21}x_1^{t+1} + a_{22}x_2^{t+1} + \ldots + a_{2m}x_m^{t+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1^t + b_{n2}x_2^t + \ldots + b_{nm}x_m^t \geqslant a_{n1}x_1^{t+1} + a_{n2}x_2^{t+1} + \ldots + a_{nm}x_m^{t+1} \end{cases}$$

La condizione che, per ogni processo, il valore della produzione dev'essere non maggiore dei costi deve tener conto del fatto che, riferendosi queste due grandezze a periodi diversi, occorre renderle confrontabili maggiorando i costi col saggio d'interesse. Indicando allora con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (o con la notazione vettoriale p) i prezzi dei beni e con β il fattore d'interesse (per cui il saggio d'interesse è $\beta - 1$), si ha:

$$(2)\quad \begin{cases} b_{11}p_1^{t+1} + b_{21}p_2^{t+1} + \ldots + b_{n1}p_n^{t+1} \leqslant \beta^t (a_{11}p_1^t + a_{21}p_2^t + \ldots + a_{n1}p_n^t) \\ b_{12}p_1^{t+1} + b_{22}p_2^{t+1} + \ldots + b_{n2}p_n^{t+1} \leqslant \beta^t (a_{12}p_1^t + a_{22}p_2^t + \ldots + a_{n2}p_n^t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1m}p_1^{t+1} + b_{2m}p_2^{t+1} + \ldots + b_{nm}p_n^{t+1} \leqslant \beta^t (a_{1m}p_1^t + a_{2m}p_2^t + \ldots + a_{nm}p_n^t) \end{cases}$$

I sistemi (1) e (2) hanno evidentemente infinite soluzioni in x, in p e in β. Per rendere determinato il sistema, von Neumann definisce l'equilibrio in un modo particolare, cioè come quella situazione nella quale i rapporti tra i livelli dei processi rimangono costanti di periodo in periodo (per cui, per qualunque i, si ha: $x_i^{t+1} = \alpha\, x_i^t$), e nella quale i prezzi e il saggio d'interesse non mutano da un periodo all'altro. Allora le (1) e le (2) si trasformano come segue:

$$(3)\quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m \geqslant \alpha\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m) \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2m}x_m \geqslant \alpha\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nm}x_m \geqslant \alpha\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} b_{11}p_1 + b_{21}p_2 + \ldots + b_{n1}p_n \leqslant \beta\ (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n) \\ b_{12}p_1 + b_{22}p_2 + \ldots + b_{n2}p_n \leqslant \beta\ (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1m}p_1 + b_{2m}p_2 + \ldots + b_{nm}p_n \leqslant \beta\ (a_{1m}p_1 + a_{2m}p_2 + \ldots + a_{nm}p_n) \end{cases}$$

Si noti come l'indicazione esplicita del tempo ha potuto esser tolta perché, in base alle ipotesi fatte, le grandezze incognite che appaiono nei primi e nei secondi membri delle (3), (4) o si riferiscono allo stesso periodo di tempo, o non variano da periodo a periodo.

Si supponga che una qualsiasi delle (3) sia soddisfatta come eguaglianza. Poiché l'espressione a primo membro indica la quantità di un certo bene complessivamente prodotta in t, e l'espressione racchiusa tra parentesi al secondo membro indica la quantità di quel bene complessivamente assorbita come fattore nel medesimo periodo t, e poiché quest'ultima quantità è uguale, per ipotesi, a quella prodotta in $t - 1$, α appare come il rapporto tra la produzione di un periodo e quella del periodo precedente, ossia come il coefficiente d'espansione del bene considerato (espansione positiva se $\alpha > 1$, nulla se $\alpha = 1$, negativa se $\alpha < 1$). Il saggio d'espansione è dunque $\alpha - 1$. Affinché l'espansione possa essere positiva, occorre che, per ciascun bene, vi sia almeno un processo nel quale il coefficiente di *output* sia maggiore del coefficiente di *input*.

Se una delle (3) è soddisfatta come disuguaglianza, ciò vuol dire che il bene di cui si tratta si espande in modo tale che la quantità di esso usata come fattore in un periodo è minore della quantità prodotta nel periodo precedente. In tal caso il bene si dice *libero,* nel senso specifico che la sua disponibilità non pone vincoli alla produzione.

La quantità α può essere allora definita come il coefficiente d'espansione dell'intero sistema, nel senso che esso è il comune valore dei coefficienti d'espansione dei beni *non liberi* (scarsi).

Alle condizioni d'equilibrio (3) va aggiunta l'ulteriore condizione che, se un bene è libero, il suo prezzo è nullo.

Si supponga ora che una qualsiasi delle (4) sia soddisfatta come uguaglianza; ciò vuol dire che nel processo in questione si consegue esattamente il saggio generale del profitto (o interesse). Se invece, in una di queste relazioni, si verificasse il segno di disuguaglianza, allora, nel relativo processo, si conseguirebbe meno del saggio generale del profitto; tale processo sarebbe cioè *non profittevole.* Alle condizioni d'equilibrio (4) va aggiunta l'ulteriore condizione che, se un processo non è profittevole, il suo livello è nullo. La quantità $\beta - 1$ può dunque essere definita come il saggio d'interesse del sistema, nel senso che essa è il comune valore del saggio d'interesse nei processi profittevoli, e perciò esercitati a livelli positivi.

I sistemi (3) e (4), con le condizioni aggiuntive:

(5) se la i-ma delle (3) è soddisfatta come diseguaglianza, allora $p_i = 0$,

(6) se la j-ma delle (4) è soddisfatta come diseguaglianza, allora $x_j = 0$,

costituiscono il modello di von Neumann. Le incognite sono i livelli dei processi, i prezzi dei beni, il saggio d'interesse e il saggio d'espansione. È chiaro che il modello può determinare soltanto i livelli *relativi* e i prezzi *relativi,* dato che le (3) e le (4) sono rispettivamente omogenee in $\mathbf{x}$ e in $\mathbf{p}$. Il fatto che i prezzi determinabili dal modello siano prezzi relativi è una circostanza comune a tutti i sistemi di equilibrio generale nei quali non si facciano intervenire i fenomeni monetari. Il fatto che anche i livelli siano relativi è una peculiarità del modello di von Neumann, per la quale questo modello si distingue nettamente da quello walrasiano. L'impossibilità di determinare i livelli produttivi assoluti dipende evidentemente, nel modello di von Neumann, dal fatto che in esso non esistono risorse produttive originarie disponibili in quantità date.

b) *Dimostrazione dell'esistenza di soluzioni*

Si consideri ora il sistema (3). Poiché tanto i coefficienti a quanto i coefficienti b sono per loro natura positivi o nulli e inoltre, per l'ipotesi 2, non esiste una riga di B con elementi tutti nulli, è chiaro che è sempre possibile trovare dei valori sufficientemente piccoli di α per i quali le (3) possiedono soluzioni semipositive in x (un insieme di numeri si dice semipositivo se essi sono positivi o nulli ma non tutti nulli). Così come è chiaro che, se α cresce oltre un certo limite, le (3) non avranno più soluzioni semipositive in x. Si tratta in primo luogo di stabilire che questo valore limite di α (chiamiamolo α_0) appartiene all'insieme dei valori di α per i quali le (3) possiedono soluzioni semipositive (in caso contrario le soluzioni in questione esisterebbero solo per valori di α minori di α_0, anche se prossimi quanto si voglia ad α_0). La dimostrazione rigorosa di questo punto è alquanto complessa e non verrà data qui; ci accontenteremo di rendere la cosa intuitivamente evidente con l'ausilio di considerazioni geometriche. Si consideri una qualunque delle (3), per $m = 2$, e la si scriva nella forma:

$$(3') \qquad (b_1 - \alpha a_1)\, x_1 + (b_2 - \alpha a_2)\, x_2 \geqslant 0.$$

Questa condizione può essere espressa dicendo che il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ e $\mathbf{b} - \alpha\,\mathbf{a} \equiv (b_1 - \alpha a_1\,,\ b_2 - \alpha a_2)$ dev'essere non negativo, il che geometricamente vuol dire (ricordando che il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo compreso) che i due vettori devono formare tra loro un angolo non ottuso. La condizione poi che x sia semipositivo significa che x deve trovarsi nel primo quadrante (semiassi positivi compresi). Ponendo, per semplicità, $b_1 - \alpha a_1 = c_1$ e $b_2 - \alpha a_2 = c_2$, cominciamo col supporre che α sia sufficientemente piccolo da aversi $c_1 \geqslant 0$ e $c_2 \geqslant 0$. Allora il vettore $\mathbf{c} \equiv (c_1, c_2)$ si troverà nel primo quadrante; e nel primo quadrante sarà certo possibile trovare un x che formi con c un angolo non ottuso (ve ne sono infiniti e descrivono l'intero primo quadrante) ([1]). Per fissare le idee supponiamo che $b_1/a_1 < b_2/a_2$. Facendo allora crescere α, esso raggiungerà il valore b_1/a_1 che annullerà c_1, mantenendo ancora positivo c_2; c si disporrà allora lungo il semiasse verticale positivo, e sarà ancora possibile trovare un x del primo quadrante che formi con c un angolo non ottuso. Se α cresce ancora, mantenendosi però minore di b_2/a_2, c_1 diventerà negativo e c_2 sarà ancora positivo: c si troverà nel secondo quadrante e ancora sarà possibile trovare un x del primo quadrante che formi con c un angolo non ottuso. Quando α avrà raggiunto il valore b_2/a_2, c_2 sarà nullo e c si disporrà lungo il semiasse orizzontale negativo: la soluzione esisterà ancora, e sarà data evidentemente da tutti i punti del semiasse verticale positivo; ma è chiaro che se α cresce ancora diventando maggiore di b_2/a_2, c entrerà

([1]) Si noti che, poiché le (3) sono omogenee in $\mathbf{x}$, se un vettore è soluzione, lo è ogni altro che abbia la medesima direzione e verso; perciò *una* determinata soluzione è rappresentata da *tutti i punti di una semiretta*, i quali corrispondono tutti allo stesso sistema di livelli *relativi* dei processi.

nel terzo quadrante (2) e la soluzione non esisterà più. Dunque esiste un valore di α (precisamente b_2/a_2), per il quale la soluzione esiste e al di sopra del quale la soluzione non esiste più.

Una facile estensione di questo risultato può farsi nel caso del sistema:

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \geqslant 0$$
$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \geqslant 0$$

dove $c_{ij} = b_{ij} - \alpha\, a_{ij}$. In questo caso, sempre partendo da una situazione in cui α è abbastanza piccolo da rendere positivi i quattro c (nel qual caso la soluzione esiste perché c'è un x che forma con $\mathbf{c}_1 \equiv (c_{11}, c_{12})$ e con $\mathbf{c}_2 \equiv (c_{21}, c_{22})$ angoli non ottusi), facendo crescere α si possono verificare due casi: o $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ ruotano nello stesso senso o ruotano in senso opposto. Nel primo caso è facile rendersi conto che la soluzione esiste per quel valore di α per il quale uno dei due vettori abbia per primo raggiunto la posizione del semiasse orizzontale (o verticale) negativo, ma più non esiste per valori di α maggiori di quello. Nel secondo caso (tenendo presente che $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$, all'aumentare di α, devono comunque finire nel terzo quadrante) possono darsi due sottocasi: 1) prima che uno dei due vettori abbia raggiunto il terzo quadrante $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ si allineano e l'angolo piatto da essi formato avrà un lato nel secondo e l'altro nel quarto quadrante; allora la soluzione esiste per quel valore di α per cui ciò accade (ed è data da quell' x che è bisettrice di quell'angolo piatto), mentre non esiste più per un α maggiore di quello; 2) uno dei due vettori raggiunge il terzo quadrante (cioè si dispone lungo l'uno o l'altro dei semiassi negativi) prima che essi abbiano potuto allinearsi; allora la soluzione esiste per quel valore di α per cui ciò accade (ed è data da un x che giace lungo uno dei semiassi positivi), ma non esiste più per valori di α maggiori di quello.

Immaginando estese al caso generale le considerazioni ora fatte, possiamo affermare che l'insieme dei valori di α, per i quali le (3) hanno soluzioni semipositive in x, possiede un massimo α_0. È facile poi vedere che per $\alpha = \alpha_0$ è impossibile che le (3) siano soddisfatte tutte come diseguaglianze. Nel caso della (3') si consideri che, per $\alpha = \alpha_0 = b_2/a_2$, la condizione si riduce a $c_1x_1 \geqslant 0$ dove $c_1 < 0$, e quindi x_1, non potendo essere negativo, è certamente nullo (mentre x_2 è un numero qualsiasi): il che, appunto, soddisfa la condizione come eguaglianza. Nel caso generale si consideri che se, per $\alpha = \alpha_0$, tutte le (3), fossero soddisfatte col segno $>$, sarebbe possibile trovare un numero α' (magari piccolissimo) tale che un x che soddisfi le (3) per $\alpha = \alpha_0$, continuerebbe a soddisfarle anche per $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$; ma allora α_0 non sarebbe il valore massimo di α, contro l'ipotesi.

Analogamente a quanto s'è fatto per il sistema (3), si consideri ora il sistema (4). Poiché, per l'ipotesi 1, non esiste una colonna di A con

(2) Al tendere di α all'infinito, c tende a un limite che è la bisettrice del terzo quadrante, giacché tanto c_1 che c_2 tendono a $-\alpha$.

elementi tutti nulli, è chiaro che esistono valori sufficientemente grandi di β per i quali le (4) possiedono soluzioni semipositive in p; così com'è chiaro che, se β diminuisce oltre un certo limite, le (4) non hanno più soluzioni semipositive. Detto β_0 tale limite, si può mostrare che esso appartiene all'insieme dei valori di β per cui le (4) hanno soluzioni, e che, per $\beta = \beta_0$, è impossibile che le (4) siano soddisfatte tutte come diseguaglianze.

Per dimostrare adesso che, non solo il sistema (3), (4) possiede soluzioni, ma che altresì ne possiede il sistema completo (3), (4), (5), (6), occorre in primo luogo dimostrare che $\beta_0 \leqslant \alpha_0$.

A tal fine occorre stabilire alcune proprietà dei sistemi di disequazioni lineari.

Proprietà I: *Ha luogo necessariamente l'una o l'altra delle seguenti due circostanze*:

1) *il sistema di equazioni*

$$(7)\qquad \begin{array}{l} a_{11}p_1 + \ldots + a_{n1}p_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1 + \ldots + a_{nm}p_n = b_m \end{array}$$

possiede una soluzione non negativa;

2) *il sistema di disequazioni*

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$(9)\qquad b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m < 0$$

possiede una soluzione. La dimostrazione di questo teorema dovrebbe essere divisa in due parti. Nella prima parte si dimostrerebbe che le circostanze 1) e 2) non possono verificarsi contemporaneamente; nella seconda parte si dimostrerebbe che, se una delle due circostanze non ha luogo, allora ha certamente luogo l'altra. Ora, mentre la dimostrazione della prima parte è semplicissima (e può essere condotta su linee analoghe a quelle che si troveranno descritte nella dimostrazione della prima parte della Proprietà II), la dimostrazione della seconda parte è alquanto complessa. Noi qui ci limiteremo a dare del teorema in questione una semplice illustrazione grafica in due dimensioni, la quale serve a chiarire la natura dell'enunciato e a rendere intuitivamente evidente la proprietà da esso espressa. Supponendo dunque $n = m = 2$, le (7), (8), (9) diventano:

$$(7')\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = b_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = b_2 \end{array} \right. \qquad (8')\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$(9')\qquad b_1x_1 + b_2x_2 < 0$$

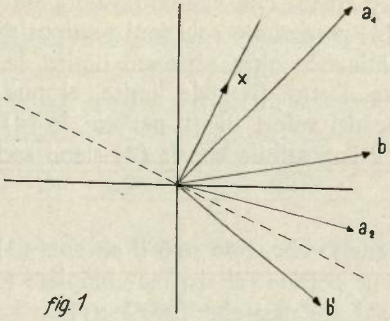

fig. 1

Nella fig. 1 $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ sono rispettivamente i vettori (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}); $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ sono due possibili vettori (b_1, b_2); $\mathbf{x}$ è un vettore (x_1, x_2). Possono darsi due casi: 1) il vettore (b_1, b_2) appartiene all'angolo formato da $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ (come accade, in figura, per $\mathbf{b}$); allora esso è una combinazione lineare non negativa di $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ e quindi esistono due numeri non negativi p_1 e p_2 soddisfacenti le (7'), mentre non è possibile trovare un vettore $\mathbf{x}$ che contemporaneamente formi angoli non ottusi con $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ — come sarebbe richiesto dalle (8') — e un angolo ottuso con $\mathbf{b}$ — com'è richiesto dalla (9') —; 2) il vettore (b_1, b_2) non appartiene all'angolo formato da $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ (come accade, in figura, per $\mathbf{b}'$); allora, mentre non esistono due numeri non negativi p_1 e p_2 che soddisfino le (7'), è sempre possibile trovare un vettore $\mathbf{x}$ che formi angoli non ottusi con $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ e un angolo ottuso con $\mathbf{b}'$: basta considerare una retta passante per l'origine e che lasci da una parte del piano $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ e dall'altra parte $\mathbf{b}'$ (retta separatrice); la semiretta perpendicolare a tale retta nell'origine dalla parte di $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ fornisce un $\mathbf{x}$ soluzione del sistema (8') (9').

Proprietà II: *Ha luogo necessariamente l'una o l'altra delle seguenti due circostanze*:

1) *il sistema di disequazioni*:

$$(10) \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + \ldots + a_{n1}p_n \leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1 + \ldots + a_{nm}p_n \leqslant b_m \end{cases}$$

ha una soluzione non negativa;

2) *il sistema di disequazioni*:

$$(11) \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + \ldots + a_{nm}x_m \geqslant 0 \\ b_1\,x_1 + \ldots + b_m\,x_m < 0 \end{array}$$

ha una soluzione non negativa. La dimostrazione consiste, prima, nel provare che le circostanze 1) e 2) non possono aver luogo contemporaneamente, e, poi, che se una non ha luogo, allora ha luogo l'altra. Che le (10) e le (11) non possano avere contemporaneamente soluzioni non negative, lo si dimostra per assurdo: supponiamo che tali soluzioni esistano; moltiplicando ambo i membri delle (10) rispettivamente per $x_1, \ldots, x_m$ e sommando, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j a_{ij} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} b_j x_j , \tag{12}$$

e, moltiplicando le prime n delle (11) rispettivamente per $p_1, \ldots, p_n$ e sommando, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i a_{ij} x_j \geqslant 0 ; \tag{13}$$

dalle (12) e (13) viene:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j x_j \geqslant 0$$

che contraddice l'ultima delle (11). Ciò posto, supponiamo che *non* esista una n-pla non negativa di p che soddisfi le (10). In tal caso non potranno neppure trovarsi n numeri non negativi p che, insieme a m numeri non negativi z, risolvano il sistema:

$$\begin{array}{l} a_{11}p_1 + \ldots + a_{n1}p_n + z_1 \qquad = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1 + \ldots + a_{nm}p_n \qquad + z_m = b_m \end{array} \tag{14}$$

Ma allora, per la Proprietà I, vi sarà una m-pla di x risolvente il sistema:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m \geqslant 0 \\ b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m < 0 \end{array} \tag{15}$$

Ora le (15) dicono che esiste una m-pla non negativa di x che risolve le (11). Viceversa, se supponiamo che le (11) *non* abbiano soluzione non negativa, non avranno soluzione le (15), e perciò, per la Proprietà I, avranno soluzione non negativa le (14) e quindi le (10).

Proprietà III: *Ha necessariamente luogo l'una o l'altra delle seguenti due circostanze*:

1) *il sistema di disequazioni*:

$$\begin{array}{l} a_{11}p_1 + \ldots + a_{n1}p_n \leqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1 + \ldots + a_{nm}p_n \leqslant 0 \end{array} \tag{16}$$

ha una soluzione semipositiva:

2) *il sistema di disequazioni*:

$$(17) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m > 0 \end{array}$$

ha una soluzione non negativa. Che le circostanze 1) e 2) non possano verificarsi insieme si vede subito mediante un procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione della Proprietà II. Supponiamo poi che le (16) non abbiano soluzioni semipositive; allora il sistema:

$$(18) \qquad \begin{array}{l} a_{11}p_1 + \ldots + a_{n1}p_n \leqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1 + \ldots + a_{nm}p_n \leqslant 0 \\ -(p_1 + \ldots + p_n) \leqslant -1 \end{array}$$

non avrà soluzioni non negative. Infatti, se le (16) non hanno una soluzione semipositiva, allora o non hanno una soluzione affatto, o hanno una soluzione con qualche, o tutti, gli elementi negativi, o hanno una soluzione nulla. Nel primo caso, anche le (18) saranno prive del tutto di soluzione; nel secondo caso, anche le (18) avranno soluzioni con elementi negativi; nel terzo caso, è impossibile soddisfare l'ultima delle (18). Ma allora, per la Proprietà II, esisterà una m-pla non negativa di x e un numero non negativo t, soddisfacenti il sistema:

$$(19) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m - t \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m - t \geqslant 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -t < 0 \end{array}$$

Poiché dall'ultima delle (19) si trae che t è positivo, la m-pla non negativa di x che risolve le (19) risolve anche le (17). Viceversa, supponiamo che le (17) non abbiano una soluzione non negativa; neanche le (19) l'avranno; per la Proprietà II esisterà una soluzione non negativa per le (18); ma questa soluzione non potrà avere tutti i suoi elementi nulli a causa dell'ultima delle (18); sarà quindi, in particolare, semipositiva, e quindi soddisferà anche le (16).

Questa Proprietà III ci sarà ora direttamente utile per dimostrare che $\beta_0 \leqslant \alpha_0$. Consideriamo di nuovo il sistema (3). Se ad α diamo il valore α_0, tale sistema non potrà essere risolto da una m-pla semipositiva di x in modo che tutte le sue relazioni siano soddisfatte come disuguaglianze; infatti, essendo α_0 il massimo valore di α nel senso precedentemente chiarito, una soluzione nelle x corrispondente ad α_0 deve verificare almeno una delle (3) come uguaglianza; e poiché, ovviamente, una soluzione nulla non soddisferebbe le (3) come diseguaglianze, si può dire che, per $\alpha = \alpha_0$, non esiste una soluzione non negativa per il sistema:

$$(20) \quad \begin{array}{l} (b_{11} - \alpha_0 a_{11})\, x_1 + \ldots + (b_{1m} - \alpha_0 a_{1m})\, x_m > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{n1} - \alpha_0 a_{n1})\, x_1 + \ldots + (b_{nm} - \alpha_0 a_{nm})\, x_m > 0 \end{array}$$

Allora, per la Proprietà III, esisterà una n-pla semipositiva di p soddisfacente il sistema:

$$\begin{array}{l} (b_{11} - \alpha_0 a_{11})\, p_1 + \ldots + (b_{n1} - \alpha_0 a_{n1})\, p_n \leqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{1m} - \alpha_0 a_{1m})\, p_1 + \ldots + (b_{nm} - \alpha_0 a_{nm})\, p_n \leqslant 0 \end{array}$$

ossia il sistema:

$$(21) \quad \begin{array}{l} b_{11} p_1 + \ldots + b_{n1} p_n \leqslant \alpha_0\, (a_{11} p_1 + \ldots + a_{n1} p_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1m} p_1 + \ldots + b_{nm} p_n \leqslant \alpha_0\, (a_{1m} p_1 + \ldots + a_{nm} p_n) \end{array}$$

Ma poiché β_0 è il minimo valore che β può assumere affinché le (4) abbiano soluzione, ne segue che, se le (21) hanno soluzione, $\beta_0 \leqslant \alpha_0$, c.v.d.

Possiamo ora finalmente dimostrare che il sistema (3), (4), (5), (6) possiede soluzioni non negative. Per $\alpha = \alpha_0$ è chiaro che le (3) hanno soluzioni non negative; per il fatto, poi, testé dimostrato, che $\beta_0 \leqslant \alpha_0$, è chiaro anche che, per $\beta = \alpha_0$, anche le (4) possiedono soluzioni non negative. Chiamiamo rispettivamente $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ le soluzioni di (3) e (4) corrispondenti a $\alpha = \beta = \alpha_0$. Si ha allora dalle (3) e (4) rispettivamente:

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, \bar{x}_j \geqslant \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \bar{x}_j\,.$$

$$(22') \quad \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, \bar{p}_i \leqslant \alpha_0 \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \bar{p}_i$$

Poiché il primo membro della (22) è uguale al primo membro della (22′), e il medesimo accade per i secondi membri, si ha che tanto nella (22) quanto nella (22′) deve ritenersi valido solo il segno di uguale. Cominciando allora a scrivere per disteso la (22), si ha:

$$(23) \quad \begin{array}{l} \bar{p}_1\, [\, (b_{11}\bar{x}_1 + \ldots + b_{1m}\bar{x}_m) - \alpha_0\, (a_{11}\bar{x}_1 + \ldots + a_{1m}\bar{x}_m)\,] + \ldots \\ \ldots + \bar{p}_n\, [(b_{n1}\bar{x}_1 + \ldots + b_{nm}\bar{x}_m) - \alpha_0\, (a_{n1}\bar{x}_1 + \ldots + a_{nm}\bar{x}_m)\,] = 0 \end{array}$$

Poiché le $\bar{p}$ non sono negative né lo sono le espressioni tra le parentisi quadre [dato che le $\bar{x}$ risolvono le (3)], ogni termine della somma a primo membro dev'essere nullo; il che significa che se, per un certo indice i, $[\, (b_{i1}\bar{x}_1 + \ldots + b_{im}\bar{x}_m) - \alpha_0\, (a_{i1}\bar{x}_1 + \ldots + a_{im}\bar{x}_m)\,] > 0$, allora

$\bar{p}_i = 0$, il che verifica la condizione (5). Scrivendo poi per disteso la (22') si ha:

$$\bar{x}_1 \left[(b_{11}\bar{p}_1 + \ldots + b_{n1}\bar{p}_n) - \alpha_0 (a_{11}\bar{p}_1 + \ldots + a_{n1}\bar{p}_n) \right] + \ldots$$
$$\ldots + \bar{x}_m \left[(b_{1m}\bar{p}_1 + \ldots + b_{nm}\bar{p}_n) - \alpha_0 (a_{1m}\bar{p}_1 + \ldots + a_{nm}\bar{p}_n) \right] = 0$$

da cui, con ragionamento analogo al precedente, si trae che la condizione (6) è soddisfatta. Ripetiamo, dunque: per $\alpha = \beta = \alpha_0$ il sistema di von Neumann è soddisfatto. Con analogo procedimento si vedrebbe che sarebbe soddisfatto altresì per $\alpha = \beta = \beta_0$, e quindi per ogni $\alpha = \beta = \gamma$ dove $\alpha_0 \geqslant \gamma \geqslant \beta_0$.

c) *Modelli decomponibili e indecomponibili*

C'è un caso nel quale la circostanza $\beta_0 \leqslant \alpha_0$ si tramuta in quella, più specifica, $\beta_0 = \alpha_0$.

Chiamiamo $G_1, \ldots, G_n$ i beni considerati nelle matrici A e B. Supponiamo che queste matrici siano di tal natura che sia possibile trovare un gruppo di beni che possono esser prodotti senza usare come *inputs* nessuno degli altri beni. Ciò accade quando le matrici A e B, opportunamente ordinando le righe e le colonne, si possano mettere nella forma:

$$A \equiv \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline A_2 & A_4 \end{array} \right\| \qquad B \equiv \left\| \begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline B_2 & B_4 \end{array} \right\|$$

dove con O si indica una sottomatrice composta di elementi tutti nulli, dove A_1 e B_1 hanno lo stesso numero di righe e colonne, e ugualmente accade per A_2 e B_2, per O e B_3, per A_4 e B_4, e ogni riga della sottomatrice B_4 contiene qualche elemento positivo.

Infatti, indichiamo con $1, \ldots, s$ $(s < n)$ le righe di A_1 e con $1, \ldots, t$ $(t < m)$ le colonne di A_1. Allora è chiaro che il complesso di beni G_i $(i = s + 1, s + 2, \ldots, n)$ può essere prodotto mediante un insieme di processi P_j $(j = t + 1, t + 2, \ldots, m)$ i quali non coinvolgono come *inputs* nessuno dei beni G_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

In questo caso il modello (A', B'), dove:

$$A' \equiv \left\| \begin{array}{c} O \\ \hline A_4 \end{array} \right\| \qquad B' \equiv \left\| \begin{array}{c} B_3 \\ \hline B_4 \end{array} \right\|$$

si chiama sottomodello del modello (A, B): esso può funzionare indipendentemente da (A, B) e, in tal caso, i beni G_i $(i = 1, \ldots, s)$ sarebbero soltanto prodotti e non anche usati come *inputs,* e perciò, alla stregua delle regole di von Neumann, sarebbero beni liberi (equivarrebbero ai « beni non-base » di Sraffa).

Un modello si chiama *decomponibile* o *indecomponibile,* secondo che esso contenga o meno dei sottomodelli. Si rifletta ora alla seguente circostanza: se un modello è decomponibile, non è assurdo, e può quindi accadere, che la produzione di un bene sia nulla. Basta far riferimento al sottomodello (A′, B′), e riflettere al fatto che, se esiste un gruppo di beni non-base tali che i processi che li producono non producono alcun bene-base, tali processi potrebbero avere livelli nulli, e quindi quei beni non-base potrebbero essere non prodotti, senza che ciò ponga alcun ostacolo alla produzione di altri beni.

Viceversa, se un modello è indecomponibile, è impossibile che, nella soluzione, un qualsiasi bene non venga prodotto: poiché infatti, in questo caso, ogni bene è, direttamente o indirettamente, richiesto come *input* nella produzione di ogni altro bene, la produzione nulla di un bene qualsiasi comporterebbe che tutti i processi siano esercitati a livello zero, soluzione che può essere scartata come priva d'interesse, poiché abbiamo già dimostrato, in generale, che una soluzione *semipositiva* in x esiste sempre.

Ciò vuol dire che, per un modello indecomponibile, devono verificarsi le seguenti diseguaglianze (dove il soprasegno indica i valori relativi alla soluzione):

$$\text{(24)}\qquad \begin{array}{l} b_{11}\bar{x}_1 + \ldots + b_{1m}\bar{x}_m > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\bar{x}_1 + \ldots + b_{nm}\bar{x}_m > 0 \end{array}$$

Poiché, d'altra parte, $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ non sono negativi, moltiplicando le (24) rispettivamente per le $\bar{p}$ e sommando, si ottiene:

$$\text{(25)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i b_{ij} \bar{x}_j > 0 \,.$$

Si noti che la (25) non potrebbe essere ricavata dalle (24) se in qualcuna di queste ultime avesse luogo il segno di eguaglianza. Infatti in tal caso potrebbe accadere che i beni prodotti in quantità positive abbiano tutti prezzi nulli (siano cioè o beni liberi o beni per i quali l'uguaglianza tra disponibilità e uso avvenga proprio a prezzo zero), mentre i prezzi positivi si verifichino solo per i beni non prodotti (per i quali dunque il prezzo che annulla la domanda sarebbe minore di quello che comincia a rendere conveniente l'offerta); ma allora il valore complessivo della produzione [cioè il primo membro della (25)] sarebbe nullo. Dunque la (25) è valida in generale solo per modelli indecomponibili.

Dal fatto, poi, che le $\bar{x}$ soddisfano il sistema (4), si trae:

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i a_{ij} \bar{x}_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j b_{ij} x_j \,,$$

da cui, tenendo conto della (25), viene:

$$\text{(26)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i a_{ij} \bar{x}_j > 0$$

Ma anche il sistema (3) è soddisfatto: quindi:

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i a_{ij} x_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i b_{ij} \bar{x}_j \leqslant \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i a_{ij} \bar{x}_j$$

e, in virtù della (26):

$$\alpha_0 \leqslant \beta_0 ;$$

ma poiché s'era già dimostrato che $\alpha_0 \geqslant \beta_0$ si deve concludere che, nel caso in questione vale solo il segno di eguaglianza:

$$\alpha_0 = \beta_0 .$$

Dunque nella soluzione d'un modello indecomponibile esiste un solo valore possibile per il saggio d'espansione e per il saggio d'interesse.

III

IL MODELLO DI VON NEUMANN NELLA STORIA DELLE DOTTRINE

Per valutare con esattezza il posto e la rilevanza della teoria di von Neumann nella storia del pensiero economico occorre preliminarmente accertare quali siano state le difficoltà alle quali soggiacquero le precedenti formulazioni della teoria dell'equilibrio economico generale. Tali teorie si distinguono essenzialmente per il modo in cui è concepito il capitale, e sono riconducibili a due tipi fondamentali, secondo che il capitale venga rappresentato come un insieme di beni capitali ovvero venga ricondotto, mediante qualche procedimento analitico, alle risorse originarie, natura e lavoro. Al primo tipo appartengono le teorie che potremmo chiamare di derivazione walrasiana; al secondo quelle che potremmo chiamare di derivazione böhm-bawerkiana. Le esamineremo appunto in quest'ordine.

A. La teoria dell'equilibrio di tipo walrasiano

In questo tipo di teoria le circostanze che si considerano note sono le seguenti:

1. L'ammontare, all'inizio del periodo che si considera, di ciascuna specie di risorsa produttiva (le risorse produttive, per Walras, si classificano in tre gruppi: risorse naturali, risorse umane o lavorative, beni capitali); ogni risorsa è naturalmente data nella propria unità fisica di misura.
2. Lo stato della tecnica, ossia il complesso dei procedimenti mediante i quali le risorse produttive sono trasformate in prodotti.
3. La struttura delle preferenze di ogni soggetto economico, struttura da cui sono derivabili delle funzioni di offerta per i servizi delle risorse produttive possedute dai soggetti, e delle funzioni di domanda per i beni di consumo.

Le grandezze incognite, che la teoria intende determinare, sono:

1. Le quantità offerte e utilizzate dei servizi delle risorse produttive.
2. Le quantità domandate e prodotte dei beni di consumo.
3. Le quantità prodotte dei nuovi beni capitali.

4. Il risparmio lordo complessivo.
5. I prezzi relativi dei servizi produttivi.
6. I prezzi relativi dei beni di consumo.
7. I prezzi relativi dei beni capitali.
8. Il saggio dell'interesse.

L'ipotesi fondamentale che si introduce ai fini della definizione della configurazione d'equilibrio è che tutti i mercati siano retti da condizioni di concorrenza perfetta.

La formulazione analitica della teoria varia a seconda delle ipotesi che si facciano circa lo stato della tecnica. Si può supporre che tale stato sia esprimibile mediante funzioni continue della produzione, oppure mediante matrici di coefficienti tecnici fissi; nell'uno e nell'altro caso si può ammettere, o no, che vi siano prodotti congiunti; che vi siano, o no, prodotti intermedi, i quali rappresentano una fase di passaggio dai servizi delle risorse originarie ai beni finiti; che un determinato bene possa, o no, essere prodotto in più d'un modo; e così via.

Nell'esposizione che segue noi faremo la più semplice delle ipotesi tecnologiche, ossia che lo stato della tecnica sia rappresentabile mediante una matrice di coefficienti fissi, la quale escluda sia i prodotti congiunti, sia l'esistenza di più di un'alternativa tecnologica per la produzione di ciascun bene, sia i beni intermedi. Perciò i beni sono prodotti direttamente dai servizi delle risorse originarie; ogni processo produttivo produce un unico bene, e non esiste più d'un processo per produrre un certo bene.

Inoltre, per evitare questioni irrilevanti in questa sede, non prenderemo in considerazione la derivazione delle funzioni di domanda dei beni di consumo e delle funzioni d'offerta dei servizi produttivi dalle funzioni di preferenza dei singoli soggetti, e ci limiteremo quindi a introdurre le funzioni di domanda e d'offerta come un dato originario.

Infine supporremo dapprima (salvo a far cadere quest'ipotesi subito dopo) che la produzione si svolga senza intervento di beni capitali, e che quindi le uniche risorse usate nel processo produttivo siano quelle naturali e quelle personali (le varie specie di lavoro).

I simboli siano i seguenti:

$y_1, \ldots, y_n$	quantità dei beni di consumo
$x_1, \ldots, x_m$	quantità dei servizi produttivi
$p_1, \ldots, p_n$	prezzi dei beni di consumo
$v_1, \ldots, v_m$	prezzi dei servizi produttivi

Inoltre con a_{ij} si indica la quantità nota del servizio i occorrente a produrre una unità del bene j (coefficiente tecnico).

Tra le suddette $2n + 2m$ incognite hanno luogo le seguenti relazioni:

— Funzioni di domanda:

$$(1) \quad \begin{array}{l} y_1 = f_1 (p_1, \ldots, p_n \ ; \ v_1, \ldots, v_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n (p_1, \ldots, p_n \ ; \ v_1, \ldots, v_m) \end{array}$$

— Funzioni d'offerta:

$$
(2) \quad \begin{array}{l} x_1 = g_1 (p_1, \ldots, p_n \;;\; v_1, \ldots, v_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = g_m (p_1, \ldots, p_n \;;\; v_1, \ldots, v_m) \end{array}
$$

— La quantità di un servizio usata nella produzione è non maggiore della quantità disponibile:

$$
(3) \quad \begin{array}{l} a_{11}y + \ldots + a_{1n}y_n \leqslant x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \leqslant x_1 \end{array}
$$

con la condizione aggiuntiva:

(3') — Se la i-ma delle (3) è soddisfatta come diseguaglianza, allora $v_i = 0$.

— Il costo unitario è non minore del prezzo (concorrenza):

$$
(4) \quad \begin{array}{l} a_{11}v_1 + \ldots + a_{m1}v_m \geqslant p_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}v_1 + \ldots + a_{mn}v_m \geqslant p_n \end{array}
$$

con la condizione aggiuntiva:

(4') — Se la j-ma delle (4) è soddisfatta come diseguaglianza, allora $y_j = 0$.

Alcune proprietà di questo sistema di condizioni devono essere notate.

a) La disponibilità data delle risorse produttive esercita la sua influenza sul sistema per il tramite delle funzioni di domanda e d'offerta: è infatti da tale disponibilità che dipendono sia le forme di queste funzioni sia il valore dei coefficienti che in esse appaiano. Le funzioni di domanda e d'offerta sono omogenee di grado zero, e sono inoltre tali che, per qualunque n-pla di p e qualunque m-pla di v, è verificata la condizione di pareggio del bilancio:

$$
(5) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j v_j = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i
$$

b) Tenendo conto che le (1) e (2) sono omogenee di grado zero e che le (3) e (4), se sono soddisfatte da un certo sistema di prezzi, lo sono anche da un sistema equiproporzionale a quello, si vede che la configurazione d'equilibrio, se esiste, determina solo i prezzi relativi.

c) Per quanto riguarda le condizioni (3') e (4'), esse significano rispettivamente che se una risorsa è, nella configurazione d'equilibrio, un bene non scarso il suo prezzo è nullo, e che se un bene non è economicamente producibile, non viene prodotto ([1]).

Per il sistema da (1) a (4') è stata dimostrata l'esistenza di soluzioni economicamente significative (non negative). Tale dimostrazione non verrà qui svolta; ci limiteremo soltanto a fare un cenno al modo in cui essa si conduce.

Si comincia con l'osservare che i sistemi (3) e (4) possono essere considerati rispettivamente come i vincoli di un problema di programmazione lineare e del suo duale; precisamente, il primo problema è:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j = \max$$

dove le p si considerano, per il momento, date a caso, subordinatamente alle (3) dove le x si considerano, per il momento, date a caso; mentre il problema duale è:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_i = \min$$

subordinatamente alle (4).

Ora, poiché i coefficienti a sono non negativi, le p sono non negative e le x sono positive, ne segue che tanto i vincoli del problema diretto quanto quelli del problema duale sono dotati certamente di soluzioni rispettivamente nelle y e nelle v; ma ciò significa che anche i due problemi di programmazione lineare sono risolubili, e che le soluzioni sono tali che:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i \tag{6}$$

Poiché d'altra parte questa relazione *deve* essere soddisfatta perché essa si deduce, come abbiamo detto, dalle funzioni di domanda e di offerta, allora, di tutte le infinite soluzioni dei sistemi (3) e (4), le uniche che convengono al sistema dell'equilibrio generale sono appunto quelle che risolvono i due suddetti problemi di programmazione lineare. (Si noti che la (5) e la (6) esprimono la medesima cosa da due punti di vista: la prima è l'uguaglianza tra la spesa complessiva in beni di consumo e il reddito percepito dall'insieme dei soggetti; la seconda è l'uguaglianza tra il valore della produzione e il valore dei costi).

([1]) Nella prima dimostrazione dell'esistenza di soluzioni per un sistema walrasiano, data da Wald nel 1936 (traduzione inglese in *Econometrica* ott. 1951), si supponeva che le (4) fossero soddisfatte tutte come eguaglianze e che perciò tutte le y fossero positive nella soluzione. Ma in tal caso l'esistenza di soluzioni può essere dimostrata solo se si ammette una particolare ipotesi circa le funzioni di domanda, ipotesi che consiste in sostanza nel supporre che le quantità domandate si annullano solo per valori infiniti dei prezzi. Se si rifiuta quest'ipotesi (che economicamente è priva di rispondenza alla realtà) occorre ammettere che alcuni beni possano non essere prodotti e che corrispondentemente alcune delle (4) possano essere soddisfatte come diseguaglianze. Si veda anche, su questo punto, H. W. Kuhn, « On a theorem of Wald » in *Linear inequalities and related systems*, cit.

In relazione poi ad alcune proprietà della programmazione lineare, si vede che se le (3) e le (4) vengono soddisfatte nel modo testè detto, anche le (3') e le (4') saranno soddisfatte.

Poiché, dunque, nella risoluzione dei due suddetti problemi, diretto e duale, di programmazione lineare, le p e le x si considerano come parametri, da tale soluzione si hanno le y e le v in funzione delle p e delle x. Si scriva allora:

$$(7) \quad \begin{aligned} y_j &= \varphi_j (p_1, \ldots, p_n, \; x_1, \ldots, x_m) \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ v_i &= \psi_i (p_1, \ldots, p_n, \; x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (1) e (2) si ottiene:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi_j (p_1, \ldots, p_n, x_1 \ldots, x_m) &= f_j (p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_m) \\ & \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ x_i &= g_i (p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Queste (8) costituiscono un sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ incognite p e x. Il loro significato economico è evidente; le prime n danno l'equilibrio sul mercato dei beni di consumo, sotto forma di uguaglianza, per ciascun bene, tra la quantità offerta e la quantità domandata, dove tali quantità sono espresse mediante i prezzi dei beni e le quantità dei servizi produttivi (le quali quantità di servizi influiscono sull'offerta in modo diretto, e sulla domanda in modo indiretto, per il tramite del reddito che esse consentono ai consumatori); le altre m danno l'equilibrio sul mercato dei servizi produttivi, sotto forma di uguaglianza, per ciascun servizio, tra la quantità domandata e la quantità offerta, essendo quest'ultima espressa mediante i prezzi dei beni di consumo e le quantità di tutti i servizi (le quali influiscono sull'offerta in modo indiretto, per il tramite del reddito che esse consentono ai soggetti economici).

È stato dimostrato che è possibile trovare almeno una n-pla di p e una m-pla di x soddisfacenti il sistema (8). Le principali condizioni dalle quali dipende la possibilità di dimostrare l'esistenza di soluzioni sono, in primo luogo, la continuità delle funzioni di domanda, e, in secondo luogo, il fatto che l'insieme delle y producibili [ossia soddisfacenti le (3)] sia un insieme convesso. Questa condizione di convessità è assicurata dalla tecnologia di tipo lineare (a rendimenti costanti).

Quale sia il ruolo della condizione di continuità nel garantire l'esistenza di soluzioni, è evidente e non ha bisogno di particolari illustrazioni. Quale sia il ruolo, al medesimo fine, della condizione di convessità può essere mostrato intuitivamente. Considerando due beni y_1 e y_2, si supponga dapprima (fig. 2) che il luogo di trasformazione corrisponda a un insieme convesso delle configurazioni produttive possibili, e si costruisca una curva d'offerta di y_1 in funzione di p_1. Si otterrà un grafico come quello della fig. 3: supponendo naturalmente costante p_2, y_1 si manterrà nullo per tutti i valori di p_1 per i quali p_1/p_2 è minore della pendenza (in valore assoluto) di AB. Per quel valore di p_1 per il quale p_1/p_2 è uguale alla pendenza di AB, l'offerta di y_1 può avere tutti i valori compresi tra zero e OR. Per tutti i valori di p_1 per i quali p_1/p_2 è com-

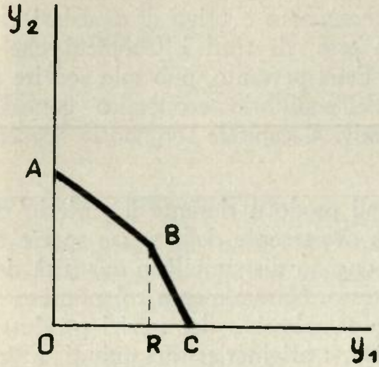

fig. 2

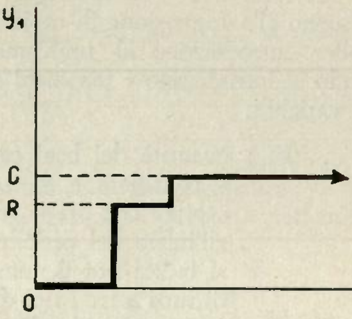

fig. 3

preso tra la pendenza di *AB* e quella di *BC*, l'offerta sarà esattamente *OR*. Per i valori di p_1 per cui p_1/p_2 è maggiore della pendenza di *BC* sono possibili tutte le offerte che vanno da *OR* a *OC*. L'offerta non può crescere più di tanto. La curva d'offerta è dunque continua e ha una forma a gradini. Si supponga adesso che l'insieme delle configurazioni produttive possibili sia concavo (fig. 4) e si provi a tracciare la curva

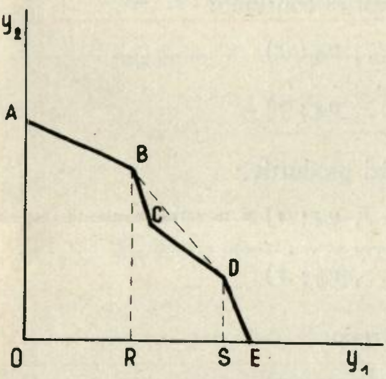

fig. 4

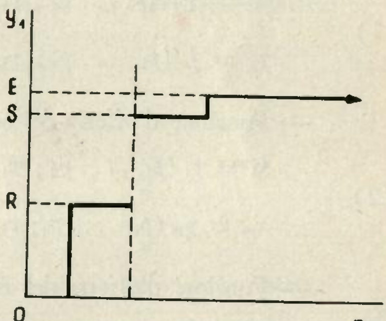

fig 5

d'offerta di y_1 (fig. 5). Di nuovo avremo che per tutti i valori di p_1 per cui p_1/p_2 è minore della pendenza di *AB* l'offerta è nulla. Se p_1 aumenta fino al punto che p_1/p_2 è uguale alla pendenza di *AB*, l'offerta può avere tutti i valori da zero a *OR*. L'offerta poi sarà esattamente *OR* se p_1 aumenta ancora; ma quando p_1 sia diventato tale che p_1/p_2 è uguale alla pendenza del segmento *BD* (tratteggiato nella fig. 4) l'offerta *salterà* a *OS* e ivi rimarrà fino a che p_1 sia tale che p_1/p_2 sia minore della pendenza di *DE*. Quindi per p_1/p_2 uguale alla pendenza di *DE* saranno possibili tutte le offerte da *OS* a *OE*, dopo di che l'offerta non crescerà più. Tale curva d'offerta è dunque discontinua, e non esisterebbe configurazione d'equilibrio se la domanda passasse per il « buco » che la curva d'offerta presenta.

È inutile dire che il modello ora esaminato è privo di qualsiasi efficacia interpretativa, data l'assenza, in esso, di tutti i fenomeni che si riferiscono alla formazione di capitale. Esso, pertanto, può solo servire da semplice introduzione al problema dell'equilibrio economico generale. Quando si introducano i fenomeni relativi al capitale sorgono le seguenti altre variabili:

$K_1, \dots, K_s$: quantità dei beni capitali prodotti durante il periodo che si considera, e che sono ovviamente delle stesse specie dei capitali che ora si suppongono disponibili in quantità date all'inizio del periodo stesso. Naturalmente col numero m si indica ora il numero complessivo dei servizi produttivi di tutti e tre i tipi di risorse originarie; sarà quindi $s < m$ (si suppone che da 1 a s le risorse consistano in beni capitali e da $s + 1$ a m consistano in risorse naturali e personali)

$P_1, \dots, P_s$: prezzi dei suddetti beni capitali

S : risparmio lordo complessivo

r : saggio dell'interesse.

Si indica poi con b_{il} ($i = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, s$) la quantità (nota) del servizio i occorrente a produrre una unità del capitale l.

Tra tutte le variabili del sistema intercorrono ora le seguenti relazioni:

— Funzioni di domanda dei beni di consumo:

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1 (p_1, \dots, p_n ; v_1, \dots, v_m ; r) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n (p_1, \dots, p_n ; v_1, \dots, v_m ; r) \end{aligned}$$

— Funzione d'offerta dei servizi produttivi:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= g_1 (p_1, \dots, p_n ; v_1, \dots, v_m ; r) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= g_m (p_1, \dots, p_n ; v_1, \dots, v_m ; r) \end{aligned}$$

— Funzioni d'offerta del risparmio:

$$(3) \quad S = f (p_1, \dots, p_n ; v_1, \dots, v_m ; r)$$

— Eguaglianza tra risparmio e investimenti:

$$(4) \quad S = P_1K_1 + \dots + P_sK_s$$

— La quantità di ciascun servizio usata nella produzione è non maggiore della sua disponibilità:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_{11}K_1 + \dots + b_{1s}K_s &\leqslant x_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n + b_{m1}K_1 + \dots + b_{ms}K_s &\leqslant x_m \end{aligned}$$

con la condizione aggiuntiva:

(5′) — Se la i-ma delle (5) è soddisfatta come diseguaglianza, $v_i = 0$.

— Il costo unitario di ciascun bene di consumo è non minore del prezzo:

$$(6)\quad \begin{array}{l} a_{11}v_1 + \ldots + a_{m1}v_m \geqslant p_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}v_1 + \ldots + a_{mn}v_m \geqslant p_n \end{array}$$

con la condizione aggiuntiva:

(6′) — Se la j-ma delle (6) è soddisfatta come diseguaglianza, $y_j = 0$.

— Il costo unitario di ciascun bene capitale nuovo è non minore del prezzo:

$$(7)\quad \begin{array}{l} b_{11}v_1 + \ldots + b_{m1}v_m \geqslant P_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{s1}v_1 + \ldots + b_{sm}v_m \geqslant P_s \end{array}$$

con la condizione aggiuntiva:

(7′) — Se la l-ma delle (7) è soddisfatta come diseguaglianza, $K_l = 0$.

— Il saggio di rendimento netto è uguale per tutti i beni capitali. Poiché v_l ($l = 1, \ldots, s$) è il prezzo lordo del servizio del capitale l, e se si indica con t_l la durata (nota) in anni di tale capitale, la quota d'ammortamento è $A_l = \dfrac{rP_l}{(1+r)^t - 1}$, dalla relazione $P_l = (v_l - A_l)/r$ si ha per ogni bene capitale:

$$(8)\quad \begin{array}{l} P_1 = v_1 \dfrac{(1+r)^{t_1} - 1}{r(1+r)^{t_1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_s = v_s \dfrac{(1+r)^{t_s} - 1}{r(1+r)^{t_s}} \end{array}$$

Le seguenti proprietà di questo sistema devono essere notate:

a) I beni capitali nuovi (prodotti rispettivamente nelle quantità $K_1, \ldots, K_s$) non sono produttivi durante il periodo che si considera, ma lo diventano solo a partire dal periodo successivo, non incluso nel modello; cosicché i servizi dei capitali offerti durante il periodo corrente (e resi disponibili nelle quantità $x_1, \ldots, x_s$) sono i servizi dei capitali esistenti in quantità date all'inizio del periodo stesso. Questa ipotesi è essenziale allo schema walrasiano; l'ipotesi contraria, ossia che i beni capitali prodotti nel periodo considerato siano fonte di servizi produttivi durante il periodo stesso, è infatti inammissibile per la seguente ragione. Se si volesse stabilire una relazione tra la quantità del servizio proveniente da un certo bene capitale e la quantità di questo bene prodotta durante un periodo, occorrerebbe tener conto del modo in cui la produzione del bene capitale si distribuisce nel periodo stesso; e ciò per l'ovvia ragione che le singole unità del capitale possono dare, nel periodo, tanto maggiori quantità di servizio quanto più presto vengono rese disponibili emergendo dal processo produttivo. Per tener conto della distribuzione lungo il periodo della produzione delle varie unità del bene capitale, bisognerebbe dividere il periodo walrasiano in una successione di sottoperiodi. Sorgerebbe allora il problema di sapere se, per ciascuno di questi sottoperiodi, la situazione vada concepita come una situazione di equilibrio o no; e la risposta non può essere che affermativa, giacché, nel caso contrario, la situazione relativa a un sottoperiodo andrebbe concepita come la tappa di un processo di conseguimento di un equilibrio non ancora raggiunto, laddove non esiste nulla nello schema walrasiano che consenta di prendere in esame una simile situazione. Ma è chiaro che, se per ognuno di quei sottoperiodi si definisse una configurazione di equilibrio, il sottoperiodo diventerebbe esso stesso il periodo walrasiano; e poiché in un sottoperiodo la quantità di un servizio dipende, per definizione, solo dallo *stock* iniziale del relativo bene capitale e non anche dal capitale correntemente prodotto, si deve concludere che il periodo walrasiano è tale da non potersi consentire che un bene capitale prodotto lungo di esso sia produttivo prima del termine del periodo medesimo. Come si vede, la ragione di fondo di questa circostanza è che, nello schema walrasiano, l'equilibrio è definito in modo che, all'interno del periodo cui l'equilibrio stesso riferisce, non è possibile prendere in considerazione il trascorrere del tempo.

b) Le (1), (2), (3) sono tali che, per qualunque n-pla di p, per qualunque m-pla di v e per qualunque saggio dell'interesse r, si ha:

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j y_j + S = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i$$

la quale dice che la somma del consumo e del risparmio è uguale al reddito percepito dall'insieme dei soggetti economici.

c) Le (1), (2), (3) sono omogenee di grado zero rispetto ai prezzi (*non* rispetto anche al saggio d'interesse), e poiché le (4), (6), (7), (8), se sono soddisfatte da un certo sistema dei prezzi, lo sono anche da un altro sistema equiproporzionale a quello, ne segue che il sistema dell'equilibrio può determinare i prezzi relativi ma non quelli assoluti.

d) Le condizioni aggiuntive (5'), (6'), (7') hanno un significato analogo a quello già visto per il sistema precedente; sull'ammissibilità dell'ipotesi che alcuni beni capitali possano non essere prodotti dovremo peraltro tornare in seguito.

Per quanto riguarda la dimostrazione che il sistema (1)-(8) sia provvisto di soluzioni economicamente significative, si può argomentare come segue.

In primo luogo è chiaro che in tale sistema è rinvenibile un problema, diretto e duale, di programmazione lineare, dello stesso tipo di quello già visto nel più semplice sistema precedente. Il problema diretto è:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j + \sum_{l=1}^{s} P_l K_l = \max$$

subordinatamente ai vincoli (5). In questo problema si devono naturalmente supporre dati i p, i P e le x. Il problema duale è:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_i = \min$$

subordinatamente ai vincoli (6) e (7). Che questi due problemi di massimo e minimo possano sempre essere risolti discende dalla non negatività dei coefficienti a e b e dalla positività delle x. Che, poi, di tutte le soluzioni ai sistemi (5), (6), (7), quelle che convengono al sistema dell'equilibrio generale siano proprio quelle che risolvono i suddetti problemi di programmazione lineare, è dimostrato dal fatto che l'uguaglianza tra il valore della funzione da massimizzare e quello della funzione da minimizzare è richiesta, tenendo conto della condizione (4), dalla (9), la quale dev'essere sempre verificata.

Procedendo ora su linee analoghe a quelle che si sono seguite per il modello walrasiano senza formazione di capitale, il primo passo consiste nel ricavare, mediante risoluzione dei due suddetti problemi, diretto e duale, di programmazione lineare, le y, i K, e le v come funzioni dei p, dei P e delle x:

$$\begin{aligned} y_j &= \varphi_j\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) && (j = 1, \ldots, n) \\ K_l &= \Phi_l\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) && (l = 1, \ldots, s) \\ v_i &= \psi_i\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) && (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Eguagliando poi i secondi membri di (3) e (4), ed effettuando le opportune sostituzioni, si ottiene anche il saggio dell'interesse come funzione dei medesimi parametri:

$$r = \Psi\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m).$$

Per determinare tutti questi parametri, si utilizzano le (1), le (2) e le (8), che dopo effettuate le sostituzioni, si trasformano così:

$$\begin{aligned} &\varphi_j\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) = f_j\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) \\ &\qquad\qquad (j = 1, \ldots, n) \\ (10)\qquad &x_i = g_i\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) \\ &\qquad\qquad (i = 1, \ldots, m) \\ &P_l = \psi_l\,(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m) \cdot F_l\,[\Psi(p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_m)] \\ &\qquad\qquad (l = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

dove col segno di funzione F_l nell'ultimo gruppo di equazioni abbiamo indicato l'espressione per cui risulta moltiplicato il prezzo del servizio in ciascuna delle (8).

Le (10) costituiscono un sistema di $n + s + m$ equazioni nelle $n + s + m$ incognite p, P e x. Che questo sistema possa essere risolto non è mai stato dimostrato, e sarebbe certo altamente desiderabile che chi possiede gli strumenti matematici adatti si cimentasse in questa prova. Sembra a chi scrive (al di fuori ovviamente di ogni pretesa di conclusività su questo punto) che la dimostrazione non dovrebbe presentare, in questo caso, difficoltà sostanzialmente diverse da quelle che si incontrano nel più semplice caso in cui si supponga assente la formazione di capitale, non essendovi ostacoli, in questo più complesso caso, ad ammettere ipotesi analoghe di continuità e di convessità.

Ma anche ammesso che una soluzione esista, vi sono delle circostanze che la rendono economicamente inaccettabile. Per vedere questo punto si rifletta, innanzi tutto, al fatto che la possibilità di pervenire alle funzioni φ_j, Φ_l e ψ_i dipende dalla possibilità di affermare, in generale, che i due problemi di programmazione lineare sono dotati di soluzioni; quest'ultima possibilità, a sua volta, dipende dall'aver scritto i sistemi vincolari come disequazioni; per le (5) e le (6) ciò non fa sorgere problemi particolari; diversamente stanno le cose per quanto riguarda le condizioni (7), le quali ammettono che la produzione di qualche bene capitale possa non essere conveniente, e sia in tal caso nulla in equilibrio.

Per vedere se tale ammissione sia plausibile o no, si può argomentare come segue. Lo schema walrasiano include tra i dati lo stato della tecnica (funzioni di produzione) e la struttura psicologica dei soggetti (funzioni di domanda dei beni di consumo e funzioni d'offerta dei servizi produttivi). Se questi elementi sono dati, il sistema economico deve alla fine pervenire a una situazione stazionaria. A questo punto, anche indipendentemente da eventuali limiti posti dalla impossibilità di espandere la disponibilità di risorse naturali, il sistema non accumulerebbe più, e si limiterebbe a rinnovare il capitale che si consuma nel processo produttivo (assumendo, per ora, che anche la popolazione pervenga a uno stato stazionario).

Il periodo di tempo al quale lo schema walrasiano si riferisce può allora essere concepito o come appartenente alla successione di periodi di tempo lungo la quale il sistema si avvicina al suo stato stazionario, ovvero come uno dei periodi successivi all'insorgere dello stato stazionario.

Cominciamo da questa seconda possibilità. Si tratta dunque di esaminare un sistema in cui la formazione di capitale avviene solo al fine di rinnovare il capitale consumatosi, durante il periodo considerato, nel processo produttivo. Si consideri ora che, tra i dati del problema, vi è l'insieme degli *stocks* di beni capitali disponibili all'inizio; ciascuno di questi *stocks* sarà noto evidentemente non solo per quanto riguarda il numero dei beni che lo compongono, ma altresì per quanto riguarda la durata e la distribuzione per età di tali beni; cosicché risulterà data anche la quantità di ciascun bene capitale che si consumerà durante il periodo. Ciò significa che le quantità $K_1, \ldots, K_s$ non potranno essere considerate come incognite, ma andranno prese come date. Vediamo quali conseguenze analitiche si avranno sul sistema dell'equilibrio. In primo luogo, nelle relazioni (5) quei termini dei primi membri nei quali compaiono i K dovranno essere portati nei secondi membri, con il che i termini noti non saranno più le disponibilità complessive dei servizi ma quanto rimane di tali disponibilità dopo aver tolto quel che occorre per produrre i beni capitali. Il problema diretto di programmazione lineare ridiventa allora quello di massimizzare il valore complessivo della produzione dei beni di consumo. Corrispondentemente nel problema duale occorrerà lasciar cadere i vincoli (7), e la funzione da minimizzare sarà il valore dei costi relativi all'impiego dei servizi produttivi nella sola produzione dei beni di consumo. Si tratterà allora di dimostrare che è possibile trovare una n-pla di

p e una m-pla di x tali che, trovate le y e le v mediante la risoluzione dei due problemi di programmazione lineare, e trovato r mediante l'equazione che si ottiene eguagliando i secondi membri della (3) e della (4) e sostituendo le P con le espressioni fornite dalle (8), si possa, sostituendo tutti questi valori nelle (1) e nelle (2), renderle soddisfatte. Ci troviamo di nuovo di fronte a una dimostrazione che non dovrebbe presentare difficoltà rispetto a quella analoga che si dà per il sistema senza formazione di capitale, e che si può senz'altro assumere come possibile. In tal modo si perverrebbe ad accertare l'esistenza di una soluzione; ma si tratterebbe di una soluzione non accoglibile, in quanto l'eliminazione dei vincoli (7) toglierebbe ogni garanzia che le condizioni della concorrenza siano osservate anche nel campo della produzione dei beni capitali.

Passiamo ora alla seconda possibilità, cioè che il periodo esaminato sia precedente a quello nel quale si raggiunge lo stato stazionario. In questo caso le quantità $K_1, \ldots, K_s$ riacquistano la loro caratteristica di incognite, ma ad esse va imposta una condizione ulteriore rispetto a quelle già contenute nel modello, ossia che esse devono essere non minori delle quantità che occorrono per far fronte al logorio del capitale. Ora è chiaro che, con tale condizione, non si può più affermare la risolubilità, in generale, del problema, diretto e duale, di programmazione lineare contenuto nel modello, giacché non si può più affermare che i vincoli del duale sono, in generale, provvisti di soluzione. Questa considerazione vale evidentemente anche per uno stato stazionario in senso lato, nel quale si ammetta una formazione di capitale per tener dietro all'aumento di popolazione.

A tutto ciò si potrebbe obbiettare — tanto per lasciare aperta un'ultima alternativa — che non necessariamente si debbono imporre al modello condizioni relative al perseguimento o al conseguimento di uno stato stazionario, nel senso che si potrebbe ammettere la possibilità che le quantità prodotte dei beni capitali siano inferiori a quelle che occorrono per i rinnovi, fino ad essere eventualmente nulle; con il che le K non sarebbero sottoposte ad alcun vincolo, oltre a quelli già contenuti nel modello. Ma che non si possa consentire a tale possibilità, deriva dalla natura stessa delle condizioni (8). Se infatti qualcuno degli *stocks* non fosse rinnovato completamente, o non lo fosse affatto, ciò darebbe luogo in prospettiva a mutamenti rilevanti nel sistema economico, sia perché si modificherebbe il sistema di rapporti tra le disponibilità di risorse produttive di periodo in periodo, sia perché, quando alcuni *stocks*, non rinnovati, si fossero esauriti, tutti i beni, capitali e di consumo, nei quali i servizi di quegli *stocks* intervengono direttamente o indirettamente come *inputs,* non potrebbero più essere prodotti. Tali modificazioni toglierebbero ogni validità all'ipotesi su cui sono basate le (8), che cioè i prezzi dei servizi dei capitali sono previsti come costanti di periodo in periodo e uguali ai prezzi correnti.

Anche per questa via si ha dunque la conferma che le condizioni della concorrenza, nella produzione dei beni capitali, non possono essere scritte nella forma delle diseguaglianze (7). Ma abbandonare questa forma significa precludersi la possibilità di affermare in generale l'esistenza di soluzioni per i due problemi di programmazione lineare e quindi per il sistema dell'equilibrio nel suo complesso.

B. La teoria dell'equilibrio di tipo böhm-bawerkiano

Si può ritenere di derivazione böhm-bawerkiana una teoria dell'equilibrio la quale risolva i mezzi di produzione prodotti (materie prime, macchine, ecc.) nei servizi delle risorse produttive originarie (lavoro e «terra») investiti durante una successione di periodi precedente al periodo corrente. In una tale concezione gli *inputs* che intervengono nella produzione corrente di un dato bene possono essere divisi in due categorie: alla prima categoria appartengono i servizi delle risorse originarie utilizzati direttamente come tali nel processo produttivo; alla seconda categoria appartengono i servizi delle risorse originarie incorporati nei mezzi di produzione e che « maturano » nel periodo corrente nella misura in cui i mezzi di produzione si consumano nel processo produttivo. Nei riguardi di questa seconda categoria di servizi un problema particolare sorge nel caso in cui essi siano incorporati in capitali durevoli, giacché occorrerebbe stabilire quale parte della quantità complessiva di servizi che un capitale durevole può rendere durante la sua vita dev'essere imputata alla produzione del periodo corrente, e, quindi, quale parte dei servizi originari contenuti nel capitale stesso venga a maturazione nel periodo corrente. In quel che segue non affronteremo questo problema, che è secondario ai fini che qui ci proponiamo, e supporremo perciò che tutti i mezzi di produzione siano del tipo non-durevole.

Storicamente, il primo che ha formulato una teoria dell'equilibrio generale sulla base di premesse böhm-bawerkiane è stato Wicksell (1). Qui esamineremo la più recente di tali formulazioni, quella di Lindhal (2). Quest'autore fa successivamente riferimento a due possibili configurazioni d'equilibrio, una stazionaria e un'altra con formazione netta di capitale; noi trascureremo l'esame di questa seconda configurazione, giacché tale esame non potrebbe cambiare, in nessun punto essenziale, le conclusioni che potremo raggiungere ragionando attorno alla configurazione stazionaria.

Le incognite dello schema di Lindhal sono le seguenti (3):

y^j	$(j = 1, \ldots, n)$	:	quantità domandate dei beni di consumo.
x^i	$(i = 1, \ldots, m)$	:	quantità offerte dei servizi originari di lavoro e « terra ».
p^j	$(j = 1, \ldots, n)$	:	prezzi dei beni di consumo.
v^i	$(i = 1, \ldots, m)$	:	prezzi dei beni originari.
$x^i{}_h$	$(i = 1, \ldots, m)$ $(h = -1, \ldots, -t)$	:	quantità complessive dei servizi originari investiti nei mezzi di produzione; l'indice in alto i si riferisce al tipo di servizio, l'indice in basso h al periodo in cui la quantità in questione è stata investita.
x^{ij}	$(i = 1, \ldots, m)$ $(j = 1, \ldots, n)$	:	quantità del servizio i usata direttamente nella produzione del bene j.

(1) K. Wicksell, *Lezioni di economia politica,* UTET, Torino 1950, pp. 218-229.

(2) E. Lindhal, « The place of capital in the theory of price », nel vol. *Studies in the theory of money and capital,* Londra 1950; si tratta della trad. inglese di uno studio pubblicato in svedese nel 1929.

(3) Rispetto al testo di Lindhal (*op. cit.,* pp. 304-309) cambiamo le notazioni per renderle omogenee a quelle adoperate qui per lo schema walrasiano.

x^{ij}_h $(i = 1, \ldots, m)$ $(j = 1, \ldots, n)$ $(h = -1, \ldots, -t)$: quantità del servizio i investita nel periodo h in mezzi di produzione destinati a produrre il bene j nel periodo corrente.

r : saggio dell'interesse.

Tra tali incognite si stabiliscono le seguenti equazioni ([1]):

— Equazioni di domanda per i beni di consumo, le quali hanno il medesimo aspetto e significato di quelle walrasiane (Lindhal ne scrive solo $n - 1$, perché una domanda può essere determinata come si dirà, mediante il complesso delle equazioni del sistema):

$$(1) \qquad y^j = f^j (p_1, \ldots, p_n, v_1, \ldots, v_m, r) \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

— Equazioni d'offerta dei servizi originari, anch'esse aventi il medesimo significato delle analoghe walrasiane:

$$(2) \qquad x^i = g^i (p_1, \ldots, p_n, v_1, \ldots, v_m, r) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

— Equazioni che danno i coefficienti tecnici in funzione del sistema dei prezzi dei servizi e del saggio d'interesse:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{x^{ij}}{y^j} = F^{ij} (v_1, \ldots, v_m, r) && \begin{aligned}(j &= 1, \ldots, n)\\ (i &= 1, \ldots, m)\end{aligned} \\ &\frac{x^{ij}_h}{y^j} = F^{ij} (v_1, \ldots, v_m, r) && \begin{aligned}(i &= 1, \ldots, m)\\ (i &= 1, \ldots, n)\\ (h &= -1, \ldots, -t)\end{aligned} \end{aligned}$$

Le equazioni (3) si determinano mediante le usuali regole del calcolo marginale, a partire da funzioni della produzione i cui argomenti sono costituiti dai servizi correnti e da quelli investiti in ciascuno dei periodi passati: dalla condizione dell'eguaglianza delle produttività marginali ponderate si ricavano appunto i coefficienti tecnici in funzione dei prezzi dei servizi, i quali devono essere maggiorati degli interessi che maturano dal perodo del loro investimento al periodo corrente.

— Equazioni che danno l'eguaglianza tra il valore di un bene prodotto e il valore dei suoi costi:

$$(4) \qquad p^j y^j = \sum_{i=1}^{m} v^i \left[x^{ij} + x^{ij}_{-1} (1 + r) + \ldots + x^{ij}_{-t} (1 + r)^t\right] \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

— Equazioni che esprimono le condizioni proprie dello stato stazionario; tali condizioni sono quelle che si richiedono affinché, a partire dal periodo corrente, nel quale, per ipotesi, si è raggiunta la stazionarietà,

([1]) A differenza di quanto abbiamo fatto per il modello walrasiano, accettiamo qui la formulazione in termini di equazioni, anziché di disequazioni (sebbene essa sia matematicamente inaccettabile al fine di determinare soluzioni significative, ossia non negative), in quanto la rilevazione della difficoltà dello schema in discussione il capitale rimanga costante nella sua composizione e nella sua dimensione:

$$
\begin{aligned}
& x^i = \sum_{j=1}^{n} (x^{ij} + x^{ij}_{-1} + \ldots + x^{ij}_{-t}) \\
(5)\quad & x^i_{-1} = \sum_{j=1}^{n} (x^{ij}_{-1} + x^{ij}_{-2} + \ldots + x^{ij}_{-t}) \qquad (i = 1, \ldots, m) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x^i_{-t} = \sum_{j=1}^{n} x^{ij}_{-t}
\end{aligned}
$$

— Per rendersi conto di come nasca l'ultima equazione del sistema, sono da farsi le seguenti considerazioni. Il numero delle incognite elencate al principio è $2n + 2m + nm\ (t+1) + mt + 1$; il numero delle equazioni finora scritte è $2n + 2m + nm\ (t+1) + mt$: occorre dunque un'altra equazione. Quale debba essere la natura di quest'altra equazione si può vedere mediante la considerazione che, fino a questo momento dell'esposizione, nulla esiste nello schema di Lindhal che consenta di determinare la dimensione del capitale (circolante). In altri termini, mentre in Walras tra le quantità date delle risorse produttive esistevano anche gli *stocks* iniziali dei beni capitali, qui, avendo risolto i beni capitali nelle risorse originarie in essi investite, ed essendo incognite le quantità di ciascuna delle risorse investite in ognuno dei periodi, non esiste altro modo di assumere come dato il capitale se non considerandolo nel suo insieme. Ora la quantità complessiva di capitale a disposizione dell'economia all'inizio del periodo corrente è data dall'espressione:

$$
(*) \quad \sum_{i=1}^{m} v^i \left[x^i_{-1} (1+r) + x^i_{-2} (1+r)^2 + \ldots + x^i_{-t} (1+r)^t \right]
$$

Quest'espressione è naturalmente un'espressione in valore, essendo relativa al capitale nel suo complesso, ed è ciò che bisogna eguagliare a qualcosa di dato perché il problema dell'equilibrio sia determinato. Wicksell si limitò (*op. cit.*, p. 227) a porre l'espressione (*) uguale « a una certa quantità data: il valore di scambio totale del capitale impiegato »; ma che questo procedimento sia illegittimo risulta chiaro riflettendo al fatto che il valore di scambio del capitale *non* può essere assunto come dato prima che si conoscano i prezzi d'equilibrio, prezzi che sono ciò che si tratta di determinare a partire, tra l'altro, dalla quantità data di capitale: altrimenti non si eviterebbe un ragionamento in circolo.

Lindhal (*op. cit.*, p. 308) procede in altro modo. Egli cerca di misurare il capitale mediante il böhm-bawerkiano *periodo medio d'investimento* (T), e, rendendosi conto che, quando si fa uso del saggio composto dell'interesse, T è una funzione del saggio dell'interesse, assume come data la *forma* di tale funzione. In conformità a tale procedimento, egli dà la

---

può essere fatta senza bisogno di esaminare il procedimento di risoluzione del sistema. Si tratta infatti, come si vedrà, di una difficoltà di ordine logico più che strettamente matematico.

seguente definizione di T: « definiamo T come il numero di periodi durante i quali il valore complessivo di tutti i servizi originari offerti nel periodo dato, aumentato degli interessi composti al saggio dato, diviene uguale al valore complessivo di tutti i servizi che maturano e sono consumati nel periodo in questione ». Ciò fatto, egli stabilisce la seguente equazione (che definisce come l'equazione relativa al reddito totale del periodo):

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{m} v^i x^i (1+r)^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} v^i \sum_{j=1}^{n} [x^{ij} + x^{ij}_{-1} (1+r) + x^{ij}_{-2} (1+r)^2 + ... + x^{ij}_{-t} (1+r)^t]$$

Si noti come tutte le equazioni del sistema da (1) a (6) siano omogenee di ordine zero nei prezzi e come perciò tale sistema possa determinare solo i prezzi relativi. Per quanto riguarda la determinazione della domanda del bene che è stato lasciato fuori dalle (1), si procede così: sommando membro a membro le (4) si ottiene, a secondo membro una espressione uguale a quella che si trova a secondo membro della (6); uguagliando allora i primi membri si perviene a un'espressione che, una volta risolto il sistema, ed effettuate le sostituzioni, conterrebbe come unica incognita la quantità di un bene di consumo.

Senonché nei riguardi del sistema di Lindhal va detto che l'equazione (6) non è altro che la definizione, in forma implicita, di T, e T non può esser dato come funzione di r altro che per il tramite di tale equazione; la quale si trasforma, in tal modo, in un'identità, che non impone alcuna condizione alle variabili del sistema. Anche il ragionamento di Lindhal equivale perciò a un ragionamento circolare, che lascia indeterminata la configurazione d'equilibrio.

C. Significato della teoria di von Neumann

Tra i vari elementi di differenziazione, la teoria walrasiana e quella di Lindhal hanno questo elemento a comune: ambedue assumono il capitale tra i dati del problema dell'equilibrio. Ciò fa sorgere immediatamente un problema *particolare* di misurazione del capitale: particolare nel senso che l'unità di misura non deve dipendere dai valori che assumono le incognite nella configurazione d'equilibrio, giacché, in caso contrario, il capitale non potrebbe più essere, contro l'ipotesi, uno degli elementi determinanti di tale configurazione [1].

È dunque inaccettabile, nell'ambito d'una teoria di derivazione böhmbawerkiana, la misurazione del capitale complessivo in termini di valore. Ma abbiamo visto come, in questa concezione, anche se si ricorre a parti-

(1) Si veda anche, su questo essenziale requisito che deve essere soddisfatto da ogni grandezza che si assuma come determinante l'equilibrio: M. Dobb, « I requisiti di una teoria del valore », nel vol. *Economia politica e capitalismo,* Einaudi, Torino 1950, pp. 20-21; nonché, dello stesso autore, « Di alcune tendenze della moderna teoria economica », nel vol. *Teoria economica e socialismo,* Editori Riuniti, Roma 1960, p. 154.

colari artifici, si perviene ugualmente a criteri di misurazione che implicano un ragionamento circolare.

Nella teoria walrasiana si sfugge a questo tipo di difficoltà logica in quanto ci si riferisce al capitale non come a una grandezza globale, ma come a un insieme di *stocks*, ognuno dei quali, essendo composto d'un sol tipo di beni, può essere misurato nelle opportune unità fisiche. Ma lo sfuggire a questa difficoltà ne fa subito nascere un'altra; dopo l'esposizione che abbiamo data della teoria walrasiana, quest'altro tipo di difficoltà può essere descritto come segue.

Nell'ambito di una certa tecnologia, la configurazione d'equilibrio dovrebbe realizzarsi per opera dell'azione *congiunta* delle preferenze dei soggetti economici e della composizione data delle risorse produttive; e dicendo azione « congiunta » s'intende dire che questi due elementi hanno il medesimo grado d'importanza, precisamente nel senso che, senza uno di essi, l'altro non sarebbe in grado di determinare l'equilibrio. Lo schema walrasiano è scritto appunto in modo corrispondente a questa impostazione. Ma se a definire la composizione data delle risorse produttive intervengono anche gli *stocks* dei vari beni capitali, allora le preferenze dei soggetti e la disponibilità delle risorse non possono più essere poste sullo stesso piano ai fini della determinazione dell'equilibrio. Infatti, i casi sono due: o nel periodo considerato il sistema si trova in uno stato stazionario, e allora la composizione della formazione di capitale è univocamente determinata dalla natura degli *stocks* iniziali; oppure il sistema non è in uno stato stazionario, e allora, pur potendosi ammettere una formazione netta (positiva o negativa) di capitale, tuttavia occorre che essa non sia tale da modificare (sostanzialmente) la composizione iniziale data del capitale, ché altrimenti le condizioni che dànno l'uguaglianza dei saggi di rendimento non potrebbero essere concepite con riferimento a prezzi lordi dei servizi dei capitali *immutabili per tutti i periodi futuri*; il che significa che, tanto nel primo quanto nel secondo caso, non vi è posto per un ruolo autonomo delle preferenze dei consumatori.

Le difficoltà dello schema walrasiano (che, nei loro aspetti formali, sono state descritte più sopra) derivano dunque dall'incompatibilità che esiste tra l'ipotesi che le preferenze dei soggetti economici abbiano un ruolo autonomo nella determinazione della configurazione d'equilibrio e l'ipotesi che tra gli elementi determinanti di tale configurazione vi sia un dato insieme di *stocks* di beni capitali.

Dall'esame dei modelli di Walras e di Lindhal si deduce allora che la misurazione del capitale (che si richiede quando si include il capitale stesso tra i dati che devono determinare l'equilibrio) dà luogo a difficoltà insuperabili, sia che si consideri il capitale nel suo insieme sia che lo si consideri come complesso di grandezze singole. Per valutare meglio questo tipo di difficoltà sembra opportuno chiedersi quale sia l'origine, nella storia delle dottrine, di questo modo particolare di considerare il capitale. Il modo migliore per definire tale origine è quello di far riferimento alla critica che, implicitamente o esplicitamente, l'economia moderna ha fatto all'economia classica, e della quale le teorie di derivazione walrasiana e böhm-bawerkiana sono l'espressione più compiuta. Tale critica, quali che siano stati i modi particolari della sua formulazione, consiste essenzialmente nel respingere il concetto classico della finalizzazione del processo economico al sovrappiù e quindi all'accumulazione, e nel conseguente tentativo di porre il consumo a fine del processo economico. In termini diversi, ma esattamente equivalenti, si può dire che questa critica consiste nel rifiuto della posizione subordinata a cui il pensiero classico aveva ridotto il valor d'uso, e nel tentativo di costruire una teoria nella quale al valor d'uso fosse assegnato il ruolo di categoria fondamentale rispetto a tutte le altre. Ora è chiaro che, nell'ambito di tale concezione, il problema economico resta necessariamente definito come quello di conseguire un massimo risultato sul terreno del consumo a partire da una disponibilità data di risorse, e il capitale dev'essere perciò dato, insieme a tutti gli altri « fattori della produzione ».

Il concetto di consumo come fine sta dunque all'origine sia della funzione determinante assegnata alle preferenze dei consumatori sia della funzione determinante assegnata alla disponibilità data delle risorse, capitale incluso; sta cioè all'origine dei due elementi che, con la loro non compatibilità reciproca, dànno luogo alle difficoltà insuperabili della teoria moderna.

Ora la teoria di von Neumann taglia alla radice queste difficoltà, togliendo al consumo il suo ruolo di fine. In questa teoria infatti non esiste altra categoria economica che quella del capitale; in essa il capitale è posto come il punto di partenza e il punto d'arrivo del processo economico, come, allo stesso tempo, il mezzo e il fine. Ed è proprio per questa omogeneità di mezzo e fine che l'unica grandezza che nel modello di von Neumann può essere massimizzata è il saggio di sviluppo, con il che viene meno la stessa necessità di porre il capitale come un dato, e l'unico dato che rimane è la struttura della tecnica. La stessa composizione del capitale (cioè l'insieme dei livelli relativi dei processi) è, in equilibrio, quella che è solo in quanto è quella che massimizza il saggio di sviluppo; il consumo non soltanto non ha alcun ruolo nel determinare quella composizione, ma, esso stesso, non è altro che uno degli elementi che caratterizzano la composizione medesima. In questo senso si può parlare propriamente in von Neumann di una certa ripresa della linea di pensiero che fu propria dei classici: usando la terminologia classica, si può dire, con tutta esattezza, che anche qui abbiamo una posizione del tutto subordinata del valor d'uso, il quale non viene ad avere altra funzione di quella che consiste nell'assumere le forme più appropriate per consentire la massima possibile espansione del valore di scambio.

La rilevanza economica del modello di von Neumann può quindi essere esattamente valutata solo in quanto ci si renda conto che esso si colloca al termine della parabola seguita dalla teoria moderna, la quale, iniziatasi sulla base di un completo rovesciamento della teoria classica, è passata attraverso una serie di tentativi, anche formalmente, insostenibili, e ha finito per dover ripristinare, in un aspetto essenziale, l'impostazione da essa criticata. Se si tratti di un ripristino pieno, ovvero soltanto parziale, e, comunque, se la ripresa, in qualche modo, dei concetti classici non ponga altri problemi e altre difficoltà, è una questione che resta aperta, e che richiederebbe un discorso, appunto, sull'economia classica che esce dai limiti di questo scritto.

Claudio Napoleoni