

7. L'analisi dei modelli econometrici nell'ambito della teoria dei sistemi

di Mario Faliva

1. Considerazioni introduttive

Come è noto, in un modello econometrico ogni singola equazione rappresenta una specifica relazione, desunta dalla teoria economica, che esprime un legame fra una variabile endogena (al primo membro) ed un insieme di variabili (al secondo membro) che sono considerate esplicative della prima.

Le relazioni espresse dal modello possono rappresentare propriamente dei legami unidirezionali, interpretabili in termini di causa-effetto. Spesso peraltro la natura delle connessioni fra variabili può condurre a configurare l'esistenza di legami bidirezionali, caratterizzati cioè dalla presenza di fenomeni di «feedback», il che non si accorda con una interpretazione in termini causali.

Il fenomeno della interazione fra le variabili, che si configura con retroazioni operanti fra le endogene contemporanee, viene comunemente indicato in econometria col termine di interdipendenza¹.

Ai fini dello studio dei modelli multiequazionali, sotto il profilo della natura ricorsiva o interdipendente delle relazioni che li compongono, si dimostra di particolare interesse un approccio basato sulla teoria dei sistemi.

Il significato che assume il collegamento fra i concetti di causalità e interdipendenza e la rappresentazione del modello come sistema ad anello aperto o chiuso, è relativo alla possibilità di applicare all'analisi dei modelli econometrici strumenti e tecniche messi a punto in ingegneria per lo studio degli schemi con «feedback».

Da un tale approccio emergono in particolare interessanti parallelismi fra struttura del modello e caratteristiche topologiche della co-

Il presente lavoro si inserisce in un progetto di ricerca finanziato con contributo del CNR (N. 89.00753.10).

¹ La interdipendenza, ancorché strutturalmente collegata alla presenza di endogene attuali - con funzione esplicativa - al secondo membro delle equazioni, può altresì essere indotta da nessi stocastici - a livello di secondi momenti - fra errori contemporanei di diverse equazioni, che vengono ad interferire coi legami di natura sistematica fra le endogene [cfr. Faliva 1987a, Cap. IX, par. 9]. In questo saggio l'accento è posto esclusivamente sugli aspetti deterministici del fenomeno.

siddetta matrice di reazione, ovvero della matrice dei parametri strutturali associati alle endogene correnti al secondo membro del sistema di equazioni; nonché la possibilità di operare una distinzione, nella rappresentazione del modello come sistema ad anello chiuso, fra meccanismi di natura ricorsiva e meccanismi di interdipendenza. In questo specifico contesto appaiono altresì evidenti le potenzialità di un'analisi integrata, condotta con tecniche proprie della teoria dei sistemi in simbiosi con strumenti appropriati di algebra lineare e concetti mutuati dalla teoria dei grafi.

2. L'interpretazione del modello come sistema ad anello chiuso

Come è noto un modello econometrico – che supporremo lineare per comodità espositiva – può essere rappresentato in forma strutturale come una equazione vettoriale del tipo:

$$[1] \quad y = \Gamma y + A z + \varepsilon$$

dove Γ ed A rappresentano due matrici sparse² di coefficienti mentre y , z ed ε stanno rispettivamente ad indicare i vettori delle endogene, delle predeterminate (che identificheremo per semplicità con le esogene) e degli errori strutturali³.

Trascurando, per comodità, la componente aleatoria e riscrivendo l'equazione strutturale [1] nella forma:

$$[2] \quad y = [I, A] \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} + [I, A] \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} y$$

è possibile dare della stessa una interpretazione come «forma primaria» di un sistema ad anello chiuso con annessa rappresentazione grafica sotto forma di schema a blocchi del tipo:

² Si noti come, in particolare, la matrice Γ abbia diagonale nulla, in quanto si esclude che una endogena retroagisca su se stessa.

³ Supponendo $I - \Gamma$ non singolare (cosiddetta «condizione di completezza»), è immediato pervenire alla soluzione del modello (coincidente nella fattispecie con la forma ridotta):

$$y = (I - \Gamma)^{-1} \cdot A z + (I - \Gamma)^{-1} \cdot \varepsilon.$$

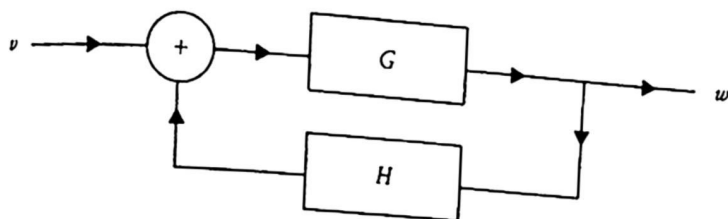


FIG. 1.

in cui:

$$v = \begin{bmatrix} o \\ z \end{bmatrix}$$

rappresenta il «segnale» di ingresso;

$$w = y$$

rappresenta il «segnale» di uscita;

$$G = [I, A]$$

rappresenta il «circuito» diretto o di trasformazione;

$$H = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

rappresenta il «circuito» di ritorno o retroazione⁴.

Ai sensi dell'interpretazione del modello come sistema ad anello chiuso, come illustrato in fig. 1, la matrice di coefficienti strutturali Γ viene ad assumere il significato di «fattore di reazione» del sistema⁵, i.e.:

⁴ La relazione esplicita che lega l'input (v) all'output (w) del sistema ad anello chiuso:

$$w = (I - GH)^{-1} \cdot Gv \Leftrightarrow y = (I - \Gamma)^{-1} \cdot Az$$

si identifica con la forma ridotta del modello (cfr. nota 3, con riferimento alla componente deterministica della soluzione).

L'operatore:

$$(I - GH)^{-1} \cdot G \Leftrightarrow (I - \Gamma)^{-1} \cdot A$$

rappresenta, per il sistema, la cosiddetta «funzione di trasferimento ad anello chiuso».

⁵ Si veda al riguardo altresì Faliva [1987b].

$$[3] \quad GH = [I, A] \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \Gamma.$$

3. La caratterizzazione del modello in termini della matrice di reazione

La caratterizzazione del modello, sotto il profilo della natura causale o interdipendente dei legami fra le endogene, può essere condotta in base ad un appropriato esame delle proprietà strutturali della matrice di reazione Γ .

Ciò che risulta essere in effetti determinante, ai fini dell'analisi che ci interessa, è l'esistenza di elementi di valore numerico nullo nella matrice di cui sopra nonché la loro posizione relativa all'interno della matrice all'oggetto⁶. Ne consegue che l'analisi stessa – in termini qualitativi – può essere condotta con riferimento alla matrice binaria Γ^b ⁷ associata a Γ ^{8,9}, che può assumersi nota a-priori¹⁰.

La corrispondenza fra caratteristiche strutturali della matrice di reazione e natura causale o interdipendente delle relazioni del modello può essere – in un contesto deterministico – propriamente ricondotta alle seguenti proposizioni:

a) se Γ^b – e di riflesso Γ – è una matrice nulla il sistema è ad anello aperto: è il caso di un modello con equazioni non interconnesse;

⁶ Le proprietà di una matrice che dipendono esclusivamente dalla disposizione e dal numero dei suoi elementi nulli sono talora denominate «proprietà topologiche» [cfr. Marimont 1969]. Proprietà topologiche di una matrice, nel senso sopra indicato, sono in particolare la diagonalità, la triangolarità, la riducibilità e la irriducibilità.

⁷ Per matrice binaria associata ad una matrice data si intende una matrice i cui elementi sono nulli in corrispondenza agli elementi nulli della matrice di riferimento e sono uguali ad uno in corrispondenza agli elementi non nulli della matrice stessa. Formalmente l'operatore che binarizza, nel senso sopra indicato, la matrice argomento viene indicato con «b».

⁸ Le proprietà topologiche (cfr. nota 6) si preservano passando da una matrice alla matrice binaria associata e viceversa [cfr. Marimont 1969].

⁹ La matrice Γ^b si identifica con la matrice di incidenza del grafo associato al modello [cfr. M. Gilli 1984].

¹⁰ La conoscenza a-priori della matrice Γ^b è implicita nei vincoli di esclusione del modello, nel senso che detta matrice riflette il complesso di informazioni – giustificabili sul piano teorico o derivanti dal processo di specificazione – relative al carattere esplicativo o meno (con corrispondente attribuzione di un valore numerico unitario piuttosto che nullo all'opportuno coefficiente della matrice) che le varie endogene correnti vengono ad assumere nell'ambito delle diverse equazioni del sistema.

- b) se Γ^b - e di riflesso Γ - è nilpotente ¹¹ il modello è del tipo a catena causale: è il caso di un sistema ricorsivo ¹²;
- c) se Γ^b - e di riflesso Γ - è cogrediente ¹³ di una matrice quasi-triangolare il modello è decomponibile in sottomodelli connessi in cascata: è il caso di un sistema ricorsivo a blocchi;
- d) se Γ^b - e di riflesso Γ - è irriducibile il modello è interdipendente.

4. Le equazioni con «autofeedback» associate al modello

Riprendiamo in esame il sistema di equazioni strutturali del par. 2 nella versione deterministica, i.e.:

$$[4] \quad y = \Gamma y + Az$$

e consideriamo i modelli uniequazionali:

$$[5] \quad p'_b y = p'_b \Gamma y + p'_b Az$$

ottenuti dalla [4] a seguito della premoltiplicazione di ambo i membri per gli autovettori destri della matrice Γ , i.e. per i vettori p'_b definiti dalle relazioni:

$$p'_b \Gamma = \lambda_b p'_b$$

in cui gli scalari λ_b rappresentano gli autovalori di Γ .

Grazie alle posizioni:

$$p'_b y = \check{y}_b$$

$$p'_b A = \check{a}'_b$$

¹¹ La nilpotenza congiunta alla nullità degli elementi della diagonale principale (cfr. nota 2) comporta la riducibilità alla forma triangolare [cfr. Faliva 1987a, Cap. II, par. 9] e rientra pertanto fra le proprietà topologiche di una matrice (cfr. nota 6).

¹² La proposizione equivale, per quanto osservato nella nota precedente, alla usuale caratterizzazione dei modelli ricorsivi basata sulla triangolarità - o comunque sulla riducibilità alla forma triangolare - della matrice dei coefficienti delle endogene correnti al secondo membro del modello [cfr. anche Faliva 1987a, Cap. IV, par. 9].

¹³ Due matrici A e B si dicono cogredienti se:

$$A = P B P'$$

per P matrice di permutazione opportunamente scelta [cfr. Berman e Plemmons 1979, Cap. 2].

i modelli uniequazionali [5] possono essere più semplicemente scritti come:

$$[6] \quad \ddot{y}_b = \lambda_b \ddot{y}_b + \ddot{a}'_b z$$

ad essere conseguentemente interpretati come equazioni con «auto-feedback» della variabile endogena trasformata $\ddot{y}_b$ su se stessa, con annessa rappresentazione sotto forma di schema a blocchi ad anello chiuso come illustrato nella figura sottostante.

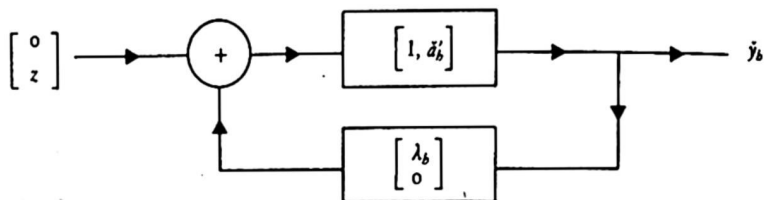


FIG. 2.

È significativo il fatto che le caratteristiche strutturali dell'equazione [6] – per il tramite degli autovalori (ed autovettori) della matrice Γ – rispecchiano il carattere ricorsivo o interdipendente del modello [4].

Più specificatamente si può osservare che:

i) qualora la [6] risulti identicamente vera solo per valori nulli dello scalare λ_b ¹⁴ nel sistema non sono operanti meccanismi di auto-feedback fra combinazioni lineari di endogene correnti ed il modello [4] ha carattere ricorsivo;

ii) ogniqualvolta la [6] risulti identicamente vera in corrispondenza ad uno o più valori non nulli dello scalare λ_b , esistono relazioni con autofeedback che interessano combinazioni lineari di endogene correnti: nel modello [4] operano in tal caso meccanismi di interdipendenza parziale (nel caso della decomponibilità) o globale (nel caso della indecomponibilità)¹⁵.

¹⁴ La matrice di reazione Γ – e di riflesso Γ^b (cfr. note 8 e 11) – è in tal caso nilpotente. Ai sensi della Proposizione b) del par. 3 il modello è del tipo a catena causale.

¹⁵ Le due diverse situazioni sono rispecchiate dalle caratteristiche strutturali degli autovettori della matrice di reazione: se gli autovettori della matrice all'oggetto non contengono alcuna componente nulla il modello è globalmente interdipendente [cfr. Berman e Plemmons 1979, Cap. 2], se per converso uno o più autovettori posseggono elementi nulli le catene causali chiuse del modello risultano circoscritte a sottoinsiemi delle endogene, e l'interdipendenza ha carattere locale (configurazione del tipo ricorsivo a blocchi).

5. Scomposizione della matrice di reazione nelle componenti ricorsiva e interdipendente

Una ulteriore interessante applicazione della teoria dei sistemi – in simbiosi con concetti mutuati dalla teoria dei grafi – è quella che conduce alla decomposizione della matrice di reazione in due termini associati rispettivamente ai legami di natura ricorsiva e ai legami di natura interdipendente operanti nel sistema.

Riferiamoci ancora al modello del par. 2 nella versione deterministica:

$$[7] \quad y = \Gamma y + A z$$

e alla annessa rappresentazione, come sistema ad anello chiuso, di cui alla fig. 1 dello stesso paragrafo.

Le caratteristiche di causalità e di interdipendenza del modello possono essere opportunamente messe in luce ricorrendo ad una scomposizione «ad hoc» della matrice Γ in un termine q , costituito dal sottoinsieme di parametri strutturali che corrispondono a legami di natura causale del modello ¹⁶, e nel suo complemento ortogonale – rispetto al prodotto di Hadamard ¹⁷ – C , costituito dal sottoinsieme di parametri strutturali interessati dai meccanismi di feedback operanti nel modello ¹⁸. Formalmente la decomposizione si configura come segue:

$$[8] \quad \Gamma = q + C, \quad q * C = 0$$

¹⁶ Per i modelli ricorsivi:

$$q \equiv \Gamma$$

¹⁷ Il prodotto di Hadamard di due matrici A e B , dello stesso ordine, è definito come la matrice dei prodotti termine a termine degli elementi delle matrici all'oggetto [cfr. Faliva 1987, Cap. II, par. 11]. Simbolicamente:

$$A * B = [a_{ij} b_{ij}]$$

Le matrici A e B si dicono ortogonali, ai sensi del prodotto Hadamard, qualora:

$$A * B = 0$$

¹⁸ Per i modelli interdipendenti:

$$C \equiv \Gamma$$

Ai sensi della [8] il modello [7] può essere riscritto nella forma:

$$[9] \quad y = qy + Cy + Az$$

e raffigurato come un sistema ad anello chiuso con doppio circuito di ritorno, come indicato dallo schema a blocchi sottostante.

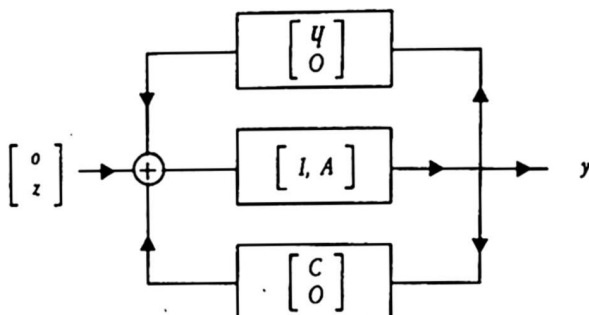


FIG. 3.

La matrice delle interdipendenze C e la matrice dei nessi causali q possono essere formalmente scritte¹⁹:

¹⁹ L'espressione analitica di C , ai sensi della [10], si ottiene, con semplici passaggi, tenuto conto che:

a) alla presenza di feedback diretto fra due variabili i e j corrisponde la non-nullità simultanea della coppia di elementi γ_{ij} e γ_{ji} della matrice Γ . Gli elementi della matrice di reazione interessati sono conseguentemente quelli appartenenti all'insieme intersezione:

$$\Gamma * (\Gamma^b)'$$

b) L'esistenza di feedback indiretto fra due variabili i e j è configurabile come una connessione bidirezionale fra i punti «i» ed «j» del grafo associato al modello di cui una diretta (da «i» a «j» senza passaggi intermedi) ed una indiretta (da «j» a «i» per il tramite di uno o più altri punti). In termini algebrici ciò equivale a postulare la non-nullità simultanea dell'elemento di posto (i, j) della matrice Γ e dell'elemento di posto (j, i) di una potenza (ad esponente intero positivo, maggiore di uno) della matrice stessa [cfr. Fiedler 1986, Cap. 4]. Gli elementi della matrice di reazione interessati sono pertanto quelli appartenenti alle intersezioni:

$$\Gamma * \{(\Gamma^b)'\}^b, \quad r = 2, 3, \dots, L-1.$$

Una volta ottenuta C si determina q , ai sensi della [11], per differenza. Per una derivazione diretta di q nella forma:

$$q = \Gamma * (U - \Gamma^b)' * \{U - [(\Gamma^b)^2]^b\}' * \dots * \{U - [(\Gamma^b)^{L-1}]^b\}'$$

si veda Faliva [1988], in cui è altresì dimostrata la nilpotenza della matrice all'oggetto.

$$10) \quad C = \Gamma * \{[\sum_{i=1}^{L-1} (\Gamma^b)^i]'\}^b$$

$$[11] \quad \eta = \Gamma - C = \Gamma * (U - \{[\sum_{i=1}^{L-1} (\Gamma^b)^i]'\}^b)$$

avendo indicato con L la dimensione delle matrici e con U la matrice i cui elementi hanno tutti valore unitario²⁰.

Sotto il profilo matematico-formale le matrici sopra definite sono caratterizzate da alcune proprietà notevoli, che riflettono la «ratio» della decomposizione proposta. I relativi enunciati possono così formularsi:

a) se Γ è indecomponibile C si identifica con Γ e η è identicamente nulla²¹;

b) se Γ è decomponibile C è cogrediente di una matrice quasi-diagonale, in cui i blocchi diagonali sono sottomatrici indecomponibili o nulle, e η è cogrediente di una matrice triangolare a diagonale nulla²²;

c) se Γ è cogrediente di una matrice triangolare (a diagonale nulla) C è identicamente nulla e η si identifica con Γ ²³;

²⁰ La matrice U svolge, rispetto al prodotto di Hadamard, il ruolo di matrice identità. Per A arbitraria, delle stesse dimensioni di U , si verifica infatti la uguaglianza:

$$A * U = A.$$

²¹ Essendo nel caso in esame Γ^b non-negativa indecomponibile, in forza di un noto teorema [cfr. Fiedler 1986, Cap. 4] si ha:

$$I + \{\sum_{i=1}^{L-1} (\Gamma^b)^i\}^b = U.$$

La verifica dell'enunciato è quindi immediata in base alle relazioni definitorie [10] e [11], tenuto altresì conto che Γ ha diagonale nulla.

²² La matrice Γ , in quanto decomponibile, è cogrediente di una matrice quasi-triangolare inferiore con blocchi diagonali indecomponibili o nulli. Simmetricamente Γ' - e di riflesso $(\Gamma^b)'$ - risulta cogrediente di una matrice quasi-triangolare superiore con le stesse caratteristiche. La stessa struttura hanno le potenze della matrice $(\Gamma^b)'$, per una nota proprietà delle matrici quasi-triangulari.

Alla luce di queste premesse, applicando alle relazioni definitorie [10] e [11] il seguente risultato di algebra lineare (di agevole dimostrazione):

$$[i] \quad J \cdot (A * B) \cdot J' = (J A J') * (J B J')$$

relativo alle trasformazioni cogredienti (con J matrice di permutazione arbitraria), la validità dell'enunciato è facilmente provata, tenendo conto - per quanto concerne i blocchi diagonali indecomponibili - delle considerazioni svolte in nota 21.

²³ Nel caso in esame $(\Gamma^b)'$ risulta essere cogrediente di una matrice triangolare superiore (a diagonale nulla): così pure le sue potenze e - di riflesso - la matrice somma $S = \{[\sum_{i=1}^{L-1} (\Gamma^b)^i]'\}^b$. La matrice C , in quanto prodotto di Hadamard - in base alla [10] - di una matrice (Γ) cogrediente di una matrice triangolare inferiore a diago-

d) Γ e C sono cospettrali²⁴;

e) U è nilpotente²⁵.

La decomposizione proposta riveste, sotto il profilo interpretativo, uno specifico interesse per la possibilità che offre di distinguere, nell'ambito delle variabili esplicative delle diverse equazioni, quali endo-

nale nulla e di una matrice (S) cogrediente di una matrice triangolare superiore a diagonale nulla, risulta pertanto – ai sensi della [i] di nota 22 – cogrediente di una matrice nulla (e quindi nulla essa stessa). Come corollario si verifica la coincidenza fra U e Γ .

²⁴ Due matrici si dicono cospettrali se hanno gli stessi autovalori (ovvero se hanno la stessa equazione caratteristica). L'asserita cospettralità di Γ e C è di immediata evidenza se Γ è indecomponibile (cfr. enunciato a) o se Γ è cogrediente di una matrice triangolare a diagonale nulla (cfr. enunciato c). Nel caso di generica decomponibilità di Γ (cfr. enunciato b) per quanto osservato in nota 22 le matrici Γ e C sono cogredienti, rispettivamente, di una matrice quasi-triangolare e di una matrice quasi-diagonale, con identici blocchi diagonali. Per un noto teorema di algebra lineare, gli autovalori di una matrice quasi-triangolare (in particolare di una matrice quasi-diagonale) coincidono con gli autovalori delle sottomatrici quadrate che costituiscono i blocchi diagonali. Ne consegue, tenuto altresì conto che le trasformazioni cogredienti preservano gli autovalori, la cospettralità di Γ e C nel caso di decomponibilità della matrice di reazione.

²⁵ Essendo U a diagonale nulla la nilpotenza risulta essere una proprietà topologica della matrice (cfr. nota 11) e quindi riferibile altresì a U^b . La nilpotenza di U^b può essere dimostrata in base al verificarsi delle L uguaglianze [cfr. Gantmacher 1959, vol. I, p. 87].

$$[i] \quad \text{tr}(U^b)^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, L.$$

Per $k = 1$ la [i] è vera per costruzione. Per $k > 1$ si può procedere come qui di seguito indicato.

Ricorrendo a proprietà elementari delle matrici binarie e del prodotto di Hadamard [cfr. Faliva 1987a, Cap. II, par. 11, e 1988] si constata agevolmente che:

$$\left\{ \sum_{r=1}^{L-1} (\Gamma^b)^r \right\}^b * (\Gamma^b)^b = (\Gamma^b)^b, \quad b = 1, 2, \dots, L-1$$

e quindi altresì che (cfr. relazione definitoria [11] e nota 20):

$$U^b * [(\Gamma^b)^b]^b = 0$$

e pertanto – a fortiori – che:

$$[ii] \quad U^b * [(U^b)^b]^b = 0$$

La [ii] equivale, per una relazione notevole fra traccia e prodotto di Hadamard [cfr. Faliva 1987a, Cap. II, par. 11], a:

$$\text{tr}(U^b)^{b+1} = 0$$

che coincide con la [i] sopra.

La cospettralità fra Γ^b e C (cfr. enunciato d) sopra) può venir provata con un procedimento analogo a quello qui illustrato (e quindi alternativo rispetto alla dimostrazione datane in nota 24).

gene correnti siano correttamente interpretabili alla stregua di cause della variabile al primo membro, intesa come effetto, e quali no: le prime essendo riconoscibili da coefficienti non nulli della matrice η le seconde da coefficienti non nulli della matrice C .

Le equazioni a cui sono associate righe di elementi nulli della matrice C ammettono, di conseguenza, una interpretazione in termini puramente causali²⁶ e l'insieme di dette equazioni configura la presenza di sottosistemi ricorsivi all'interno del modello²⁷.

Le rimanenti equazioni – associate a righe non nulle di C – corrispondono per converso ai sottosistemi interdipendenti del modello.

Concludiamo facendo rilevare come, sul piano operativo, le considerazioni che precedono abbiano interessanti riflessi ai fini della valutazione della validità – sotto il profilo logico/teorico – della specificazione adottata, in termini di scelte delle procedure di stima più opportune e con riguardo al corretto utilizzo del modello in ambito decisionale.

²⁶ L'espressione di una generica equazione del modello può essere formalmente ottenuta premoltiplicando ambo i membri della [9] per l'appropriato vettore elementare. Formalmente l'equazione k -esima ($k = 1, 2, \dots, L$) è data da:

$$[i] \quad e'_k y = e'_k \eta y + e'_k C y + e'_k A z$$

e_k essendo il k -esimo vettore elementare.

Qualora sia:

$$e'_k \cdot (\eta + C) = 0'$$

la [i] si specializza in:

$$e'_k y = e'_k A z$$

e cioè in una equazione la cui forma strutturale si identifica con la forma ridotta.

Qualora sia:

$$e'_k C = 0'$$

la [i] si specializza in:

$$e'_k y = e'_k \eta y + e'_k A z$$

e l'equazione è interpretabile come una relazione causale.

²⁷ L'esistenza di un sottoinsieme di relazioni del modello aventi struttura causale è riconducibile alla presenza di elementi nulli nel vettore $C^b u$, u essendo il vettore somma.

Riferimenti bibliografici

- Ancot, J. P. (a cura di) (1984), *Analysing the Structure of Econometric Models*, L'Aia, Nijhoff.
- Basilevsky, A. (1983), *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, New York, North-Holland.
- Berman, A. e Plemmons, R. J. (1979), *Non-negative Matrices in the Mathematical Sciences*, New York, Academic Press.
- Carlucci, F. (a cura di) (1985), *Analisi della causalità e modelli economici*, 2 voll., Roma, ISCO.
- D'Azzo, J. J. e Houpis, C. H. (1966), *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, seconda edizione, New York, Mc-Graw Hill.
- Di Stefano, J. J., Stubberud, A. R., Williams, I. J. (1976), *Feedback and Control Systems*, New York, Mc-Graw Hill.
- Faliva, M. (1987a), *Econometria: principi e metodi*, Torino, UTET.
- (1987b), *L'analisi dei modelli econometrici nell'ambito della teoria dei sistemi: primi risultati*, Contributi di Ricerca in Matematica ed Econometria 87.02, Milano, Università Cattolica.
- (1988), *L'analisi dei modelli econometrici nell'ambito della teoria dei sistemi: ulteriori sviluppi*, Contributi di Ricerca in Matematica ed Econometria 88.01, Milano, Università Cattolica.
- Fiedler, M. (1986), *Special Matrices and their Applications in Numerical Mathematics*, Dordrecht, Nijhoff.
- Gallo, G. e Corsi, P. (1986), *Gli ordinamenti causali in econometria*, in «Note di Informatica», IBM Italia.
- Gilli, M. (1984), *CAUSOR-A Program for the Analysis of Recursive and Interdependent Causal Structures*, Cahiers du Département d'Econométrie 84.03, Université de Genève.
- Harary, F. (1972), *Graph Theory*, Reading Mass, Addison-Wesley.
- Harary, F., Norman, R. Z. e Cartwright, D. (1968), *Introduction à la théorie des graphes orientés*, Parigi, Dunod.
- Huggins, W. H. e Entwisle, D. R. (1968), *Introductory Systems and Design*, Waltham Mass, Blaisdell.
- Jöreskog, K. G. e Wold, H. (a cura di) (1982), *Systems under Indirect Observation*, 2 voll., Amsterdam, North-Holland.
- MacFarlane, A. G. J. (1970), *Dynamical System Models*, London, Harrap.
- Marimont, R. B. (1969), *System Connectivity and Matrix Properties*, in «Bull. of Math. Biophysics», pp. 255-274.
- Pasinetti, L. (1965), *Causalità ed interdipendenza nell'analisi econometrica e nella teoria economica*, Ann. Univ. Cattolica AA. 1964-65, Milano, Vita & Pensiero.
- Wold, H. (a cura di) (1964a), *Econometric Model Building*, Amsterdam, North Holland.
- (a cura di) (1964b), *La technique des modèles*, Monaco, Sciences Humaines.