

VALENTINO DOMINEDÒ

---

INTORNO AL PROBLEMA DELLE  
VARIAZIONI DI QUANTITÀ NEL  
CONSUMO E NELLA PRODUZIONE

CASA EDITRICE DOTT. LUIGI MACRI  
BARI e CITTÀ DI CASTELLO

VALENTINO DOMINEDÒ

---

INTORNO AL PROBLEMA DELLE  
VARIAZIONI DI QUANTITÀ NEL  
CONSUMO E NELLA PRODUZIONE

CASA EDITRICE DOTT. LUIGI MACRÌ  
BARI - CITTÀ DI CASTELLO

\* \* \*

PROPRIETÀ LETTERARIA

\* \* \*

*Stampato in Italia*

---

Città di Castello, Società Anonima Tipografica «Leonardo da Vinci», 1942-XX

1. — Poichè intendo discutere alcune questioni connesse con gli accertamenti statistici dei movimenti *virtuali*, ritengo opportuno fin dall'inizio fare riferimento alle ricerche dello Schultz, che fra tutti gli studiosi in materia è stato certamente il più attivo e perseverante. L'opera dello Schultz trovasi anche richiamata in un recente articolo di Giovanni Demaria (1), il quale propone sempre nel campo del consumo nuove indagini, di cui ora dovrò brevemente occuparmi per passare quindi a considerare alcune tendenze nel campo della produzione.

Ciò che desta maggior interesse, e diciamo pure meraviglia, nelle ricerche dello Schultz, è il tentativo di accertare empiricamente alcune corrispondenze tra movimenti virtuali intorno a posizioni supposte di equilibrio: corrispondenze dimostrate *solo in via deduttiva* dall'analisi teorica, la quale suppone, è ben noto, che tutti gli spostamenti siano coerenti fra di loro nel quadro generale delle ofelimità interdipendenti. Vediamo dunque di impostare il problema nella maniera più semplice.

È cosa intuitiva che il singolo consumatore (perfettamente razionale) non è indotto ad alterare i consumi allorquando si verifichi una varia-

---

(1) G. DEMARIA, *Un nuovo metodo obiettivo per lo studio della dipendenza dei beni*, nel « Giornale degli Economisti », marzo-aprile 1941. Dello SCHULTZ si può vedere *Interrelations of demand, price and income* (1935) e il più ampio volume *The theory and measurement of demand* (Chicago, 1938). Mentre inizialmente avevo tratto lo spunto per queste note dall'articolo del Demaria, poi ho fermato l'attenzione anche sui fenomeni di produzione, per i quali richiamo lo studio di A. BORDIN, *L'equilibrio dell'impresa - La funzione Cobb-Douglas*, e quello ampio e sistematico del BRESCIANI TURRONI, *Alcune lezioni sulla teoria della produttività marginale* (in « Giornale degli Economisti », fascicoli di marzo-aprile e maggio-giugno 1941).

Per quanto riguarda i fenomeni di consumo debbo in parte rinviare ai miei precedenti studi in argomento (*Considerazioni intorno alla teoria della domanda*, nel « Giornale degli Economisti », gennaio e novembre 1933; *Quantità economiche oggettive e moventi edonistici*, in « Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. IX, 1935), il primo dei quali precede le indagini teoriche svolte da Hicks e Allen e poi riprese dallo Schultz.

zione proporzionale di *tutti* i prezzi dei beni e contemporaneamente del reddito monetario  $M$  destinato agli acquisti. Infatti al consumatore interessano soltanto i *rapporti* fra ciascun prezzo d'acquisto ( $p_1, p_2, \dots p_n$ ) e il reddito posseduto. Per esprimere analiticamente tale invarianza di consumi ( $x_1, x_2, \dots x_n$ ) giova riferirsi all'ipotesi di variazioni assai piccole (e tuttavia proporzionali) dei prezzi e di  $M$ : si ha allora la formola di ovvio significato:

$$[1] \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_r}{\partial p_i} + M \frac{\partial x_r}{\partial M} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots n)$$

È una espressione, codesta, del tutto generale cui si perviene per semplici ragioni intuitive. Può essere modificata lievemente se noi osserviamo che  $M = \sum_{i=1}^n p_i x_i$  ed introduciamo quindi le variazioni *compensate* dei singoli prezzi: otteniamo allora

$$[2] \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\delta x_r}{\delta p_i} = 0$$

ove  $\frac{\delta x_r}{\delta p_i} = \frac{\partial x_r}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_r}{\partial M}$  esprime il rapporto fra il mutamento risultante di  $x_r$  e la variazione di  $p_i$ , congiunta peraltro ad una ipotetica variazione del reddito ( $\delta M = x_i \delta p_i$ ) tale esattamente da compensare il mutato peso del precedente acquisto. Come è facile scorgere, una tale ipotesi di variazione *compensata* non avrebbe luogo nella teoria dell'impresa, dove si ammette che l'imprenditore possa regolare le sue domande di fattori produttivi o le sue offerte di prodotti (che possiamo ugualmente indicare con  $x_r$ , purchè si avverta che i prodotti hanno segno contrario a quello dei fattori) senza effettiva limitazione di somma (1) ed avendo riguardo esclusivo ai *rapporti fra i prezzi*. In altre parole, mentre nel consumo si può dire che ogni quantità acquistata  $x_r$  è funzione dei rapporti  $\frac{p_1}{M}, \frac{p_2}{M}, \dots \frac{p_n}{M}$ , nella teoria dell'impresa dobbiamo invece ritenere che ogni  $x_r$  è funzione di  $\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \dots \frac{p_{n-1}}{p_n}$ , essendo  $p_n$  un prezzo qualsiasi (di fattore o di prodotto) assunto a termine di riferimento e che possiamo anche, per maggiore semplicità, porre come costante ( $dp_n = 0$ ). Nella produzione, quindi, mancando  $M$ , la [1] si trasforma nella

$$[3] \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_r}{\partial p_i} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots n)$$

(1) L'ipotesi statica consente infatti di trascurare le difficoltà del finanziamento.

significando che ove i prezzi abbiano a variare *tutti* proporzionalmente (cosicchè non mutino i rapporti ora detti) nessuna delle quantità  $x_r$  deve mutare. La [3] assume una forma del tutto analoga alla [2], e ciò induce a pensare - come poi effettivamente risulta - che le  $\frac{\partial x_r}{\partial x_s}$  della produzione abbiano le stesse proprietà formali delle  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s}$  del consumo: rinviando, per questo, all'appendice.

Lo Schultz, dunque, limitandosi al consumo ha creduto di poter accertare per via statistica, non già la [1] o la [2], che avrebbero imposto una considerazione simultanea di *tutti* i beni consumati *per ogni singola categoria di consumatori*, bensì la condizione di uguaglianza  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \frac{\delta x_s}{\delta p_r}$ , che l'analisi deduttiva e propriamente matematica dimostra valida per ogni coppia di beni quando la condotta del consumatore sia del tutto razionale (1).

---

(1) Per le derivate  $\frac{\delta x_r}{\delta p_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), si può dimostrare che la stabilità dell'equilibrio impone un valore *negativo*: ogni  $\frac{\delta x_r}{\delta p_r}$  è infatti uguale (ma con segno contrario) al reciproco della derivata seconda di una linea d'indifferenza. Si confronti su questo punto il cit. articolo del 1933, nel quale mi proposi di passare dal sistema di linee d'indifferenza tra un bene qualsiasi e il reddito monetario residuo, alle formule più generali che trovansi nel Pareto e nello studio ormai noto di E. Slutsky (1915). Questo studio era allora ignorato e potei confermarne i risultati con una impostazione più facile, alla quale assomiglia quella adottata da J. R. Hicks (in *Value and capital*, cap. II). All'Hicks, che ha svolto diffusamente la nuova forma della teoria dello scambio, sembra doveroso osservare che gli appunti mossi (pag. 29) al *Manuale* del Pareto — di non aver riconosciuto le condizioni di esistenza dei beni *inferiori* — sono fuori di posto, in quanto che il Pareto volle indicare nell'Appendice del *Manuale* (pag. 502-3) talune condizioni valide soltanto nella maggioranza dei casi: accogliendo lo spirito della teoria paretiana del secondo genere di dipendenza e tenendo conto del cap. IV, §§ 19 e 48-53 dello stesso *Manuale* è agevole concludere, come ebbi ad osservare nel citato studio (§ 11), che può essere  $\frac{\delta x_r}{\delta M} < 0$  e che ciò accade ogni qual volta l'inclinazione delle linee d'indifferenza nel detto sistema tende a ridursi lungo l'*ordinata* esprimente il reddito residuo  $y$  (cioè, supponendo nel punto di equilibrio un incremento di  $y$  mentre  $x$  non muta).

Per quanto riguarda poi le  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s}$  ( $r \neq s$ ), si riconosce facilmente che esse manifestano *sostituzioni di consumi*, giacchè l'ipotesi di variazione compensata del prezzo  $p_s$  equivale sostanzialmente all'altra, in cui il reddito  $M$  è invariato, il prezzo  $p_s$  varia in un senso (per esempio aumenta) e i prezzi di *tutti* gli altri beni variano *proporzionalmente* in senso opposto e in misura tale che sia  $\sum_{i=1}^n x_i d p_i = 0$ . I mutati rapporti di  $n - 1$  prezzi rispetto a  $p_s$  rendono convenienti certe sostituzioni

2. — Concordo pienamente col Demaria nel ritenere che il tentativo dello Schultz dovesse sortire esito sfortunato. Ed arrivo anzi a dire che, se pure vi fosse la possibilità di rilevare i consumi per singole categorie omogenee di consumatori forniti di ugual reddito, e fosse quindi eliminata la difficoltà nascente dalla ripartizione dell'incremento di reddito nel mercato (che non è probabile avvenga in misura proporzionale alle quantità  $x_r$  od  $x_s$  consumate dai singoli individui), non per questo avremmo accresciuta la speranza di vedere confermata la relazione suddetta (1). Ciò che è rigoroso nella teoria può essere invero oscillante, ineguale, non abbastanza significativo nella pratica, giacchè la comunanza di gusti manca di verificarsi anche all'interno di una ristretta categoria, e i gusti medi non hanno la sensibilità di quelli individuali, nè, comunque, rimangono immutati nel lungo intervallo di tempo occorrente per le molteplici rilevazioni. La condotta spesso istintiva ed accidentale è cosa nettamente diversa dalle ipotesi razionali della teoria. E bisogna ancora osservare che, nella tecnica statistica, le interpolazioni multiple debbono essere congegnate in guisa da cogliere i soli fenomeni di domanda e non anche quelli d'offerta: se si riesce in tale compito, vi si riesce indubbiamente in modo grossolano, tenuto conto delle varie tendenze concrete (cicliche, secolari, ecc.). Da ultimo, conviene rilevare con lo stesso Schultz (*Theory*, pag. 628-31) una certa contraddizione logica: il tipo di funzioni abbastanza semplice (ad esempio lineare, oppure ad elasticità costante) adottato per le interpolazioni potrebbe già astrattamente costituire dei limiti alla specie o al grado dei nessi d'interdipendenza, qualora le funzioni stesse dovessero rispecchiare per una qualche estensione — e non soltanto in un punto rappresentativo — un quadro razionale di consumi.

Forse è vero che gli economisti teorici hanno esagerato nel raffinare sempre più le loro impostazioni astratte, che rischiano ormai di divenire

---

di consumi; e si comprende che, se  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} < 0$  i beni di indice  $r$  ed  $s$  sono obiettivamente complementari, se  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} > 0$  i beni stessi sono fra di loro succedanei. Questa distinzione ebbi ad illustrare nel citato studio (§ 21). Qui mi preme di aggiungere che, in base alla [2], le relazioni dominanti dovranno essere di *sucedaneità*, come è provato dal caso limite in cui vengano consumati due soli beni. Quando i beni siano più di due, la complementarità non deve essere dominante nel sistema: cioè, non deve accadere che ipotetiche variazioni di prezzi inducano il consumatore ad allontanarsi rapidamente da una posizione che *non era di massimo*. In modo analogo bisogna poi ragionare per le [3]: cfr. HICKS, *op. cit.*, cap. V e pag. 316-17.

(1) Quella difficoltà verrebbe meno se un dato incremento del reddito individuale inducesse variazioni di consumo *uguali*, e non già diverse nelle varie categorie, per *tutti* i consumatori.

quasi *idola mentis*, illusioni dello spirito (1). Ma negli studi di applicazioni si doveva comprendere che è vano cercar l'introvabile.

In limiti più ristretti, e cioè soltanto per avere indicazioni approssimative intorno al segno e talvolta alla grandezza di rapporti obiettivi di mercato (del tipo  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  o  $\frac{\partial x_r}{\partial M}$ ), indipendentemente da riscontri di uguaglianza fondati sull'ipotesi di una condotta razionale, i rilievi statistici possono tuttavia accogliersi. E lo Schultz ci fa sapere che l'*elasticità* di consumo rispetto al reddito è apparsa, nei casi esaminati, dello stesso ordine di grandezza della *elasticità* di consumo rispetto al prezzo dell'altro bene: cosicchè, ove il risultato si ritenga valido per gli individui, il secondo addendo delle  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s}$  (ossia « l'effetto di reddito ») assume un'importanza non grande, forse anche diviene trascurabile.

3. — Dopo le osservazioni fin qui svolte si può meglio riguardare il metodo proposto dal Demaria. Egli si riferisce, non già alle relazioni che mostrano l'influenza di una variazione dei prezzi (o del reddito) sopra le quantità consumate, bensì alle relazioni inverse di tipo marshalliano: cioè quelle che pongono i prezzi di domanda in funzione delle quantità, dato il reddito monetario.

Queste relazioni, studiate specialmente dallo stesso Schultz e da H. Hotelling, sono importanti per esaminare l'effetto di una variazione della quantità offerta (per un raccolto agricolo limitato o abbondante, o per altre ragioni) sulla formazione dei prezzi. Concettualmente, invero, ammesso che i gusti non mutino, una variazione qualsiasi di prezzi non può immaginarsi nel mercato come un *prius*, ma bisogna invece spiegarla in conseguenza di una alterazione delle quantità disponibili: la concorrenza tra consumatori o, comunque, tra acquirenti determina i nuovi prezzi. Perciò deve dirsi che le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  esprimono il comportamento *eventuale* dei singoli, subordinato alle nuove condizioni di prezzo offerte dal mercato: la somma delle  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  (a parità di indici  $r, s$ ) per tutti gli operatori all'acquisto ha, potremmo dire, un significato di mero controllo logico per la nuova situazione in cui appaiono mutati e prezzi e quantità. Ma, perchè i prezzi mutino, è necessario che vi sia inizialmente una

---

(1) È chiaro l'ammonimento di BACONE, *Nuovo Organo*, LXII: « I filosofi razionali traggono dall'esperienza cose varie e confuse, e quelle appunto non paragonate nè diligentemente esaminate e ponderate; si affidano per il resto alla meditazione e al lavoro dell'ingegno ».

variazione di quantità. Per l'intero mercato, dunque, le  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  hanno maggior significato che non le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$ , quantunque sia vero che le une di fronte alle altre stanno in un rapporto di derivazione inversa a più variabili. Come è precisato nell'appendice, ciò vuol dire che ove si conoscano le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  (di un certo individuo o del mercato) per *tutti* gli indici  $r, s$ , è possibile determinare le corrispondenti  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$ ; e viceversa. È poi superfluo aggiungere che le  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  per tutti gli individui (con riferimento ad un certo bene  $s$  e ad un prezzo di indice  $r$ ) non possono sommarsi: la derivata di tal genere per l'intero mercato si ricava infatti, *teoricamente*, dalla conoscenza di tutte le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  *del mercato*, ciascuna delle quali si trova appunto in una relazione di somma con quelle analoghe individuali.

Quale definizione obiettiva di complementarità o succedaneità dovremo porre per le funzioni del nuovo tipo? Le precedenti funzioni ci consentivano — *in un quadro razionale* — di definire la complementarità o succedaneità per il singolo a seconda che sia  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \frac{\delta x_s}{\delta p_r} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$  nel consumo,  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s} = \frac{\partial x_s}{\partial p_r} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$  nella produzione ( $r \neq s$ ). Ora dobbiamo esaminare i segni delle  $\frac{\delta p_r}{\delta x_s}$ , ma vien fatto subito di osservare che gli effetti di reddito rendono incerta per il consumo ogni conclusione. Supponiamoli dunque trascurabili, ciò che riconduce sostanzialmente il caso del consumo a quello della produzione: allora si tratta di vedere se  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  (uguale, nell'ipotesi razionale, a  $\frac{\partial p_s}{\partial x_r}$ ) abbia un segno definito. È facile scorgere che solo in un caso il segno è teoricamente definito con assoluta certezza, *contrario* a quello di  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$ : ed è il caso — al quale la realtà si avvicina più o meno — in cui i beni  $r$  ed  $s$  non hanno alcun rapporto di interdipendenza obiettiva con tutti gli altri. Questa incertezza nella corrispondenza dei concetti obiettivi sulla interdipendenza sarà naturalmente ancor più grave, in concreto, per l'intero mercato e non potrà comunque essere eliminata.

Ciò premesso veniamo al ragionamento del Demaria, che riferendosi al consumo e partendo dalle  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  vuole ricercare il segno (se non proprio il valore) della derivata seconda mista della funzione ofelimità. Ci

sembra anzitutto che, contemplando l'ofelimità, il metodo proposto debba limitarsi ad una singola categoria di consumatori (con reddito e gusti ben determinati), per la quale dovrebbero farsi rilievi statistici e poi elaborazioni simili a quelle di Schultz. I risultati, necessariamente approssimativi, dovrebbero quindi esser posti nella formula

$$[4] \quad \frac{\partial p_r}{\partial x_s} = \lambda'_s f_r + \lambda f_{rs}$$

che si ottiene derivando rispetto a  $x_s$  l'equazione di equilibrio  $p_r = \lambda f_r$  (1). La relazione [4], si noti, ha il pregio evidente di presentare un legame immediato tra moventi soggettivi e comportamento obiettivo del consumatore, laddove il legame è più complesso per la  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$ . Analogamente alla [4] si può scrivere  $\frac{\partial p_s}{\partial x_s} = \lambda'_s f_s + \lambda f_{ss}$ , il cui primo membro dovrebbe essere conosciuto statisticamente. Divisa pertanto quest'ultima equazione per  $p_s$ , e divisa la [4] per  $p_r$ , si ottiene sottraendo:

$$[6] \quad \frac{1}{p_r} \frac{\partial p_r}{\partial x_s} - \frac{1}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_s} = \frac{f_{rs}}{f_r} - \frac{f_{ss}}{f_s}$$

Questa formula dice che la differenza fra la variazione relativa di  $p_r$  e la variazione relativa di  $p_s$  dovrà essere uguale alla differenza tra la variazione relativa di  $f_r$  e quella di  $f_s$ . Fatta qualche ipotesi intorno alla grandezza di  $\frac{f_{ss}}{f_s}$  (il Demaria suppone che il suo valore assoluto sia di solito inferiore all'unità), si distinguono subito i casi in cui  $\frac{f_{rs}}{f_r}$  (e quindi anche  $f_{rs}$ ) risulta positivo, nullo o negativo.

Ma dobbiamo osservare che l'elaborazione del Demaria viene a sostituire un elemento incognito  $\left(\frac{f_{ss}}{f_s}\right)$  all'elemento incognito  $\lambda'_s$  della [4],

(1) Con  $f_r$  si indica l'ofelimità marginale del bene di indice  $r$ . Quanto a  $\lambda$ , che è il reciproco dell'ofelimità marginale della moneta, possiamo anche effettuare un componendo ed esprimerla come segue (Hotelling):

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_i f_i x_i}$$

donde si ricava

$$[5] \quad \lambda'_s = -\lambda \frac{f_s + \sum_{i=1}^n x_i f_{is}}{\sum_i f_i x_i}$$

sicchè in definitiva non fornisce un vantaggio tale da consentire con elementi più sicuri la soluzione del problema (1). Quando poi si consideri che vi è pur sempre una duplice via di determinazione, perchè è lecito supporre una variazione di  $x_r$  (in luogo di  $x_s$ ) invertendo gli indici e facendo intervenire nel ragionamento la  $f_{rr}$ , si trae la conclusione che giova attenersi in ogni caso ai semplici accertamenti obiettivi  $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x_s}\right)$  per l'intero mercato o per categorie di consumatori) abbandonando del tutto le seducenti ricerche sulle variazioni dell'utilità.

4. — Vien fatto allora di chiedersi a che cosa serve lo studio, tanto complicato, dei movimenti virtuali. Può dirsi soltanto che esso giova a fornire la nozione generica di quel che rende stabile od instabile l'equilibrio. Ed ecco in che modo.

Accertato che i movimenti del consumatore sono dettati da due moventi, l'uno dei quali è l'adattamento a una mutata capacità d'acquisto (effetti di reddito) e l'altro è la convenienza di sostituire un consumo all'altro, si può naturalmente estendere il concetto di effetto di reddito ad altri casi (offerta di servizi, offerta d'un prodotto di cui l'offerente è pure consumatore) in cui la variazione ipotetica del prezzo si unisce ad una alterazione della capacità d'acquisto. Ciò ha fatto lo Hicks, per quanto già fosse noto fin dal Walras che l'offerta di lavoro (o di risparmio) tende ad aumentare fino ad un certo punto e poi invece diminuisce mentre s'innalza il salario (o il saggio d'interesse). Comunque, in una forma o nell'altra, riusciamo a percepire che le domande dei consumatori e talune poche offerte possono talvolta reagire alle variazioni dei prezzi in un modo anormale, cioè può aversi una domanda ascendente

---

(1) La formula [6] coincide sostanzialmente con quella scritta dal Demaria, sebbene ottenuta con un procedimento diverso: ancor più brevemente, si sarebbe potuta considerare l'uguaglianza  $\frac{p_r}{p_s} = \frac{f_r}{f_s}$ , differenziandola rispetto ad  $x_s$ . Giova osservare che il primo membro della [6] presenta quasi sempre un valor positivo, poichè esso coincide col saggio di variazione relativa del rapporto  $\frac{p_r}{p_s}$ .

La tesi sostenuta, della inopportunità di svolgere ricerche sui moventi soggettivi, si applica parimenti ad ogni altro tentativo del genere: per esempio, si potrebbe differenziare le equazioni dell'equilibrio rispetto ad un prezzo e porre ipotesi semplificatrici, ma le difficoltà sarebbero forse maggiori.

Invero il comportamento della funzione ofelimità in vicinanza dell'equilibrio sfugge alla nostra conoscenza, a meno che si pongano ipotesi e condizioni parzialmente arbitrarie. Da un punto di vista generale si discute su tali condizioni nel citato articolo *Considerazioni ecc.*, § 20.

al crescere del prezzo, oppure un'offerta decrescente; e, se anche ciò non si verifica, le variazioni delle quantità individualmente domandate non soltanto riflettono il rapporto marginale di sostituzione tra il bene considerato e il reddito, o fra l'uno e l'altro bene, ma risentono anche l'influenza della mutata capacità d'acquisto, indotta dalla stessa variazione di prezzo.

Perciò si vede che taluni effetti di reddito e la presenza di rapporti di complementarità (1) potrebbero costituire elementi di instabilità per il singolo, e quindi anche — di riflesso — per la collettività. Ma bisogna aggiungere che è molto improbabile si abbia una instabilità della posizione *generale* del sistema, tale che, presentandosi eventualmente variazioni di prezzi, le successive reazioni tendano ad accrescerle anzichè a contrastarle: perchè gli effetti di reddito sono scarsamente efficaci per il complesso degli operatori, e perchè i rapporti di complementarità, anche se forti, sono probabilmente superati da quelli di succedaneità (o sostituzione *tecnica*) dovuti ai processi di trasformazione dei fattori produttivi in prodotti.

Lo Hicks ha saputo presentarci un quadro logico di tal genere, certamente efficace, ma che deve ritenersi una semplice estensione di concetti già impliciti nelle vecchie distinzioni del Marshall e del Pareto. Gli equilibri stabili ed instabili vengono da lui intesi in modo da comprendere i rapporti di interdipendenza, facendo intervenire influenze indirette dovute agli adattamenti del mercato per altri beni; e ciò completa la nozione dell'equilibrio economico generale. E' chiaro tuttavia che la stabilità di una posizione teorica non è la stabilità d'un sistema concreto, la quale dipende da fattori propriamente storici e dinamici, ben più complessi delle forze agenti nel supposto equilibrio. Così, nel capitalismo attuale, le ragioni di instabilità devono ricondursi all'esistenza di monopoli sia interni che internazionali, al problema della disoccupazione, a tutte le forme di privilegio o d'inferiorità nel campo sociale, monetario e internazionale dalle quali potrebbero svilupparsi energie distruttrici.

Inoltre, si deve avvertire che le precedenti argomentazioni vedono sempre la stabilità nel quadro di gusti già formati e costanti. Se vogliamo supporre che la causa di variazione consista in un mutamento delle domande, ci troviamo già fuori di queste ipotesi ed appare necessario esaminare i fenomeni d'inseguimento tra offerte e domande. In tal caso, a mio parere, bisogna distinguere tra i vari rapporti di complementarità: quelli riguardanti i prodotti di cui è mutata la domanda non dovranno essere considerati secondo i criteri precedenti, poichè, verificandosi un contemporaneo innalzamento (od abbassamento) di *più* domande, per vari

---

(1) Si veda la nota alla fine del § 1.

beni complementari, i prezzi di tali beni e le corrispondenti quantità prodotte palesano variazioni *nel medesimo senso* (1). Questo fatto, peraltro, non basta a costituire un motivo di instabilità generale, purchè vi siano notevoli rapporti di sostituzione tecnica (nel senso già chiarito) con i fattori produttivi disponibili nel mercato. Essendo ciò vero in generale, il concorde movimento delle domande complementari sarà presto condotto ad un punto d'arresto, data la limitazione e la decrescente produttività dei fattori disponibili.

5. — Semplificando il quadro delle interferenze, possiamo ora considerare la produzione, facendo l'ipotesi che ogni impresa offra sul mercato un solo prodotto. In tal caso la funzione di produzione assume naturalmente una forma *esplicita*, e per tutti i fattori variabili tende a verificarsi il teorema delle produttività marginali, di cui tratta con vivida chiarezza il Bresciani Turrone. Mi limiterò ad aggiungere allo studio del Bresciani, che è per sè definitivo, brevissime osservazioni.

Dal punto di vista della singola impresa, quando si trascuri il tempo come elemento della produzione, vengono a porsi — abbiamo già detto — le condizioni marginali con riguardo ai fattori *variabili*. Gli impianti fissi devono infatti supporre come già esistenti; e l'esercizio dell'impresa serve appunto ad utilizzarli secondo le attitudini, le conoscenze tecniche e lo spirito d'intrapresa di colui che vi è preposto. La remunerazione dei capitali fissi, unita al compenso per l'opera direttiva dell'imprenditore, verrà quindi determinata *come residuo* detraendo dal valore del prodotto il pagamento totale dei fattori variabili e gli oneri finanziari gravanti sull'impresa. E' per questa ragione che il problema dell'esaurimento del prodotto nella ripartizione tra i fattori non può neanche affacciarsi finchè non si ammetta l'ipotesi di un livellamento dei profitti. Fatta invece questa ipotesi, e cioè supposto che la concorrenza abbia già operato così intensamente da convertire i fattori fissi in variabili, costringendo gli imprenditori a rendere uniformi le imprese almeno nei *rapporti* tra i fattori impiegati e riducendole tutte allo stesso costo unitario (minimo), il problema stesso si pone, ma si risolve anche immediatamente. Non esistendo invero alcun fattore *fisso*, la ripartizione del prodotto deve in tal caso avvenire fra tutti i fattori in base alle produttività marginali e senza alcun residuo.

---

(1) Al contrario, nell'ipotesi che abbia a variare la quantità disponibile di una merce (fermi restando i gusti), il prezzo di tale merce e quello d'un bene complementare tendono a variare in senso *opposto*.

Per l'impresa valgono allora le uguaglianze  $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{p_2}{p}$ , ... per tutti i fattori impiegati (1); e da ciò segue l'equazione

$$[7] \quad y = \frac{\partial y}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} x_2 + \dots,$$

valida per tutte le imprese e che ammette pertanto di essere integrata per la collettività dei produttori nella forma di una funzione omogenea di primo grado. Che l'integrale della [7] abbia significato solo per l'insieme dei produttori appare evidente ove si consideri che la singola impresa non può modificare i rapporti tra i fattori impiegati finché i prezzi non mutino: essa è legata ad una certa posizione, che può solo spostare in modo rettilineo variando proporzionalmente tutti i fattori (2) e lasciando immutato il costo unitario. Nell'ipotesi di concorrenza livellatrice, non interessa dunque precisare la dimensione assoluta dell'impresa: importa soltanto di definire una serie di combinazioni ottime per le varie produzioni (e una serie corrispondente di prezzi) secondo che i diversi fattori siano disponibili sul mercato in quantità maggiore o minore. In breve: la funzione di produzione è lo stampo sul quale si modellano, in una scala unica o in scale diverse, tutte le imprese del mercato.

Da ciò risulta che la soluzione del Wicksteed e quella del Walras non differiscono sostanzialmente fra di loro, inquantochè ambedue riguardano tutti i fattori di produzione come variabili e subordinano l'impresa alle comuni necessità dominanti nel mercato.

6. — Se la tesi del Wicksteed viene accolta solo nell'ipotesi (irreale) di concorrenza livellatrice, dobbiamo naturalmente dubitare — come dubita il Bresciani — di qualunque riscontro della funzione omogenea di primo grado su dati empirici. In realtà, le pretese verifiche induttive spostano i termini del problema, poichè riguardano una tecnica produttiva in evoluzione e un complesso di imprese che possono trovarsi in fasi opposte di sviluppo. Seguiamo, per un momento, le elaborazioni del Douglas. Egli procede in due modi:

a) O considera le variazioni nelle quantità del prodotto e dei fattori (ridotti a due: lavoro e capitale fisso) da un certo anno al succes-

(1) Con  $y$  si indica la quantità del prodotto, che ha il prezzo  $p$ ; con  $x_1, x_2, \dots$  le quantità dei fattori, che hanno i prezzi  $p_1, p_2, \dots$ . Quando vi siano fattori fissi, tali uguaglianze valgono soltanto per i fattori variabili e vengono ad attestare la coincidenza di  $p$  col costo marginale. L'eventuale presenza di fattori limitatori dà luogo in ogni caso alle modifiche indicate da E. SCHNEIDER, *Theorie der Produktion* (cfr. pag. 5-6, 51-57, 77-78) e dal Bresciani, cit., pag. 279.

(2) Ammesso che il mercato lo consenta e che nell'ambito dell'impresa non sorgano discontinuità: si pensi agli impianti, che possono venir aumentati solo per unità abbastanza grandi in confronto del lavoro o delle materie prime.

sivo, per una collettività d'impresе o per un gruppo d'industrie in un mercato. In tal caso, procura di interpolare una funzione (1)  $y = c x_1^\alpha x_2^\beta$ , ossia  $d \log y = \alpha d \log x_1 + \beta d \log x_2$ . Come è chiaro, le due costanti significative  $\alpha$  e  $\beta$  possono risultare tali che la loro somma sia più o meno vicina all'unità; ma quand'anche si avesse  $\alpha + \beta = 1$ , non sarebbe lecito arguire che il mercato in esame verifica la tesi del Wicksteed, perchè le variazioni dei capitali fissi possono significare in talune impresе un perfezionamento della tecnica (e quindi un'attuazione di costi decrescenti), mentre per altre potrebbe verificarsi la situazione opposta. Ammesso che i dati siano scevri da errori, si ricava soltanto una indicazione sulle trasformazioni *prevalenti* dell'attività produttiva, senza con ciò ricostruire alcuna funzione di produzione nel senso specifico di questo termine.

b) Oppure il Douglas considera — ed è stato questo il suo primo tentativo — il totale di un'industria o di varie industrie attraverso un buon numero di anni ed effettua analoghe interpolazioni per gli indici della produzione, del lavoro ( $x_1$ ) e del capitale fisso ( $x_2$ ). In quest'ordine di ricerche, se gli scostamenti si rendono minimi rispetto ai  $\log y$ , si è riscontrato che  $\alpha + \beta$  si avvicina molto all'unità: tanto che il Douglas procede anche determinando il solo parametro  $\alpha$  e supponendo  $\beta = 1 - \alpha$ . L'interpretazione del risultato è però incerta, come provano i rilievi del Mendershausen, da cui appare come abbiano avuto un peso notevole gli scostamenti erratici dei dati per alcuni anni (anni di crisi, in cui i capitali fissi restavano in parte inoperosi e le ore di lavoro si riducevano). Che se poi analizziamo l'andamento effettivo delle serie storiche  $y$ ,  $x_1$  ed  $x_2$ , troviamo che esse negli intervalli considerati possono esprimersi come serie ad incremento relativo costante: cioè  $y = a e^{ht}$ ,  $x_1 = b_1 e^{k_1 t}$ ,  $x_2 = b_2 e^{k_2 t}$ . Dal che segue immediatamente  $y = c x_1^\alpha x_2^\beta$ , ponendo  $h = \alpha k_1 + \beta k_2$ . Come si vede, dunque, la condizione arbitraria  $\alpha + \beta = 1$  determina una coppia di costanti, che dà luogo a una funzione omogenea di primo grado costruita *deliberatamente* sui dati storici (2), mentre una

---

(1) Il Douglas chiarisce che, date le dispersioni dei dati delle singole serie, si giustifica il criterio di interpolare i  $\log y$  (rendendo minimi gli scostamenti rispetto ai dati originari) piuttosto che interpolare i  $\log x_1$  oppure i  $\log x_2$ . Cfr. P. H. DOUGLAS e G. T. GUNN, *Further measurements of marginal productivity*, in « Quarterly Journal of Economics », maggio 1940. Per il resto della bibliografia, fra cui è specialmente importante l'art. di H. MENDERSHAUSEN (« Econometrica », aprile 1938), si veda l'art. del Bordin.

(2) Questi, invero, permettono di trovare una linea nello spazio a tre dimensioni ( $y$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ). Se facciamo passare una *retta* fra l'origine degli assi ed ogni punto di questa linea, abbiamo la superficie corrispondente alla funzione omogenea di primo grado.

diversa condizione farebbe sussistere parimenti un'altra funzione, omogenea ma non di primo grado.

Tuttavia il Douglas potrebbe ribattere che, ponendo  $\alpha + \beta = 1$ , si ottiene il vantaggio di riscontrare che la produttività marginale del lavoro desunta dalla detta funzione (che ha, dobbiamo riconoscere, natura *storica*) corrisponde approssimativamente al salario reale. Si è trovato, infatti, che la quota di prodotto spettante in totale al lavoro si avvicina a quel valore di  $\alpha$  che si trae appunto dalla condizione  $\alpha + \beta = 1$ . In altre parole: la funzione  $y = c x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$  desunta dall'andamento delle serie storiche  $y$ ,  $x_1$ , ed  $x_2$  (tale cioè che  $\alpha = \frac{k_2 - h}{k_2 - k_1}$ ) sarebbe giustificata dal fatto che  $\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{x_1}{y} = \alpha$  è abbastanza vicina al salario reale moltiplicato per  $\frac{x_1}{y}$ , ossia alla quota appropriata dai lavoratori (1).

Questa giustificazione non è però suffragata da una esatta corrispondenza fra tale quota e il parametro  $\alpha$ : anzi il Douglas trova in alcuni casi disparità sensibili; nè è fondata sull'osservazione di una effettiva costanza della quota dei lavoratori in tutto il periodo di tempo considerato. Per questa ragione, e per altre ancora (2), le elaborazioni del Douglas conservano un carattere incerto, e giovano, se mai, a dare indicazioni sui rapporti di forza esistenti *in concreto* fra capitale e lavoro.

7. — E' necessario, infatti, riguardare ogni situazione concreta dal punto di vista dei rapporti di forza che, mantenendosi costanti nel tempo o variando lentamente, spiegano il formarsi e il perdurare di una estesa gamma di redditi. Ciò avviene secondo il criterio residuale sopra accennato.

(1) Invertendo il ragionamento si potrebbe passare per integrazione dalle  $\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{x_1}{y} = \alpha$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{x_2}{y} = 1 - \alpha$  (dove  $\alpha$  è il valore riscontrato per la quota spettante al lavoro) alla funzione  $y = c x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ , la quale sarebbe conforme all'andamento delle serie storiche.

Si può notare che la quota  $\alpha$ , supposta costante, verrebbe a coincidere col rapporto fra due saggi di incremento *relativo* nel tempo: quello di  $\frac{x_2}{y}$  e quello di  $\frac{x_2}{x_1}$ .

(2) Soprattutto per la riduzione dei fattori a due soltanto. Giova osservare che secondo la funzione del Douglas, e tenendo conto delle serie storiche dell'indice di produzione e del capitale fisso, la remunerazione di quest'ultimo dovrebbe ridursi nel tempo col ritmo di una progressione geometrica decrescente, ciò che non può ammettersi indefinitamente.

Lo stesso Douglas, del resto, per determinati periodi (così tra il 1922 e il 1929) ammette eccezioni alle corrispondenze tratte dalla sua funzione.

Infatti, quando pure si ammetta che l'uso del capitale a breve scadenza, l'impiego del lavoro, ecc. vengono remunerati secondo gli apporti marginali, rimane sempre la massa dei profitti, che è essenzialmente ineguale nonostante le apparenze contrarie. Com'è ovvio, sarebbe erroneo giudicare i profitti delle grandi società in base all'osservazione dei soli dividendi, perchè gli alti stipendi dei direttori e le forme numerose di riserve occulte costituiscono, in realtà, degli utili che non si trovano facilmente nelle imprese di piccole dimensioni. Ora la disparità delle imprese tende a perpetuarsi, non solo per le qualità diverse degli uomini che le dirigono, ma perchè è difficile abbattere posizioni ormai acquisite da tempo: se una posizione cade, spesso un'altra ne sorge forse ancora più forte. Così le relazioni delle imprese fra di loro, e delle imprese con gli altri soggetti (acquirenti, offerenti di materie prime, banche, ecc.) tendono ad essere rapporti di quasi monopolio o di privilegio, col fine precipuo non tanto di ridurre le remunerazioni dei fattori impiegati, quanto di tenere alte le proprie *a)* attuando quei perfezionamenti tecnici che possano determinare costi decrescenti, *b)* trovando la posizione ottima nello sfruttamento di dati impianti. I due problemi, delle variazioni da apportare agli impianti e del migliore utilizzo di quelli esistenti, sono sempre presenti alla mente dell'imprenditore.

Da ciò può dedursi che, se in qualche modo si riesce ad influire sulla distribuzione delle imprese, favorendo ad esempio l'artigianato e la media o piccola impresa, stimolando l'agricoltura, frenando l'ingigantirsi dei complessi industriali e controllandone adeguatamente l'ubicazione e la vita finanziaria, si otterranno i seguenti effetti: 1) Muteranno almeno qualitativamente le possibilità d'impiego dei fattori; 2) si formeranno profitti più eguali e, di conseguenza, verranno ridotte le successive ineguaglianze nello sviluppo delle imprese; 3) i salari stessi e le remunerazioni in genere dei fattori variabili potranno, in definitiva, trarne beneficio. Che ciò sia un bene dal punto di vista della giustizia sociale nessuno potrà mettere in dubbio. Ma l'intervento dello stato o degli enti corporativi dovrà essere in tale materia estremamente accorto, onde evitare che si freni l'impulso al progresso tecnico e si riducano quantitativamente le possibilità di lavoro, con successiva diminuzione dei salari stessi.

Questi interventi indiretti, che tendono a modificare certe condizioni distributive, certe situazioni di fatto da cui appare influenzata la produzione, allo scopo di ottenere stabili e vantaggiosi assetti nella formazione dei vari redditi, sono di gran lunga preferibili alla determinazione forzata di singole specie di remunerazioni (ad esempio, salari) che trovano sempre la loro ragion d'essere in date situazioni di mercato.

APPENDICE

Si ponga il reddito monetario disponibile per il consumo uguale a  $M = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ , indicando con  $p_i$  i prezzi e con  $x_i$  le quantità di beni acquistate nella posizione d'equilibrio. Similmente, nella produzione, s'intenda con  $M$  la differenza, generalmente negativa, tra il costo di produzione (ad esclusione delle spese fisse) e il valore dei prodotti ottenuti: se le quantità dei prodotti, in quanto vendute, si pongono come negative si può ancora definire  $M = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ . Ora introduciamo una funzione-indice di ofelimità  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e supponiamo analogamente che la  $f$  uguagliata a zero esprima in forma *implicita* il legame funzionale tra fattori di produzione e prodotti.

Nel caso del consumo bisogna rendere *massima*  $f$  tenendo conto del reddito disponibile  $M$ ; nel caso della produzione bisogna, invece, rendere *minimo*  $M = \sum_i p_i x_i$  tenendo conto di  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Introdotto un moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$ , queste impostazioni portano ugualmente al risultato  $p_i = \lambda f_i$ , dove  $\lambda > 0$ . Inoltre per la variazione seconda si ha parimenti nei due casi  $d^2 f < 0$ , mentre dev'essere  $\sum_i f_i d x_i = 0$ . Ciò vuol dire che le condizioni di stabilità si esprimono ponendo segno alternativo ai successivi determinanti

$$\Delta_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \dots \Delta_{(n)}$$

cioè scrivendo  $\Delta_{(2)} > 0, \Delta_{(3)} < 0, \dots$  per un qualsiasi ordine di beni o fattori. L'ultimo determinante, che possiamo indicare semplicemente con  $\Delta$ , sarà positivo se  $n$  è pari, negativo se  $n$  è dispari. Giova osservare che, secondo la teoria delle forme quadratiche, tali condizioni di stabilità si hanno certamente se poniamo (come fa il Pareto)

$$f_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Per trovare il valore di  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \frac{\partial x_r}{\partial p_s} + x_s \frac{\partial x_r}{\partial M}$  nella teoria del consumo, dobbiamo porre il seguente sistema di equazioni. Anzitutto un'equazione esprime la variazione del bilancio: poichè l'incremento

di reddito compensa esattamente  $x_s dp_s$ , dovrà essere  $\sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0$ ; quindi  $\sum_i p_i \frac{\delta x_i}{\delta p_s} = 0$ . Poi vi sono altre  $n$  equazioni, che si ottengono derivando le  $p_i = \lambda f_i$  rispetto a  $p_s$  nell'ipotesi di variazione compensante del reddito: esse sono  $f_i \frac{\delta \lambda}{\delta p_s} + \sum_{r=1}^n \lambda f_{ir} \frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = s \\ 0 & \text{per } i \neq s \end{cases}$ . Perciò si ottiene  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \frac{\Delta_{sr}}{\lambda \Delta}$ , essendo  $\Delta_{sr}$  il complemento algebrico dell'elemento  $f_{sr}$  in  $\Delta$ , che è — si noti — un determinante simmetrico.

Identico risultato si ha per  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  nella teoria della produzione, ove la prima equazione del sistema si pone in conseguenza della funzione implicita e le altre si ottengono derivando le  $p_i = \lambda f_i$  rispetto a  $p_s$ . Abbiamo così unificata la dimostrazione per i due problemi affini nel campo del consumo e in quello della produzione. Per il consumo vi è inoltre da considerare l'effetto di una variazione del reddito su tutti i consumi: qui basti dire che  $\frac{\partial x_r}{\partial M} = \frac{\Delta_{or}}{\lambda \Delta}$ .

Se ora cerchiamo i rapporti fra le derivate  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  e quelle definite poc'anzi, ci avvediamo che per ogni consumatore a reddito costante e per ogni imprenditore sussiste l'equazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2} dp_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial p_n} dp_n = dx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove però *nel caso della produzione* si deve supporre nulla una delle  $dp$  (per esempio  $dp_n = 0$ ) in modo che le altre esprimano, a meno di un moltiplicatore, variazioni di prezzi relativi (si confronti il § 1). Possiamo allora considerare incognite le  $dp_1, dp_2, \dots$ ; supposte nulle tutte le  $dx_i$  ad eccezione di una (cui diamo l'indice  $s$ ) troviamo facilmente le derivate  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  risolvendo un sistema di equazioni lineari. Detto  $D$  il determinante che ha per elementi le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$ , si trova  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s} = \frac{D_{sr}}{D}$ , con

l'avvertenza che nel caso della produzione  $D$  è di ordine  $n - 1$  (se fosse di ordine  $n$  sarebbe nullo). Si riconosce che il determinante  $A$  formato con gli elementi  $\frac{\partial p_r}{\partial x_s}$  è il *reciproco* di  $D$ .

Consideriamo ora in primo luogo il caso della produzione. Per esso, gli elementi di  $D$  sono a loro volta proporzionali agli elementi (con eguali indici di linee e colonne) del *reciproco* di  $\Delta$ ; applicando quindi le note proprietà dei determinanti reciproci otteniamo le seguenti proposizioni: a) il determinante  $D$  è simmetrico, di modo che  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s} = \frac{\partial x_s}{\partial p_r}$ .

(uguaglianza scritta da Hotelling); b) ammesse per  $\Delta$  le condizioni di stabilità, vale la successione  $D_{(1)} < 0, D_{(2)} > 0 \dots$ ; e quindi ancora vale la successione  $A_{(1)} < 0, A_{(2)} > 0, \dots$  con segni alternati fino ai determinanti  $D_{(n-1)}$  ed  $A_{(n-1)}$ : condizioni, anche queste, rilevate per la prima volta da Hotelling (1); c) in conseguenza di b), la forma quadratica  $\sum_1^h \sum_1^h p_r p_s \frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  ( $h < n$ ) è definita negativa. Queste proposizioni valgono per il singolo operatore, il quale è richiedente sul mercato per taluni beni (o servizi), offerente per altri beni. Dalle funzioni individuali si può poi passare a quelle totali *del mercato*, supponendo sempre che non intervengano effetti di reddito: anche per la collettività dovranno quindi presentarsi in condizioni di stabilità le tre proposizioni a) b) c), essendo in particolare valida la c) perchè le  $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$  dei vari soggetti sono sommabili.

Per il consumo individuale si hanno proposizioni alquanto diverse dalle precedenti, giacchè il carattere simmetrico e il rango  $n-1$  non spettano a  $D$ , bensì a un altro determinante (che diciamo  $H$ ) formato con gli elementi  $\frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \frac{\Delta_{rs}}{\lambda \Delta}$ . I minori principali di  $H$ , di ordine successivo, nelle condizioni di stabilità sono alternativamente negativi e positivi; inoltre, la forma quadratica  $\sum_1^h \sum_1^h p_r p_s \frac{\delta x_r}{\delta p_s}$  ( $h < n$ ) è definita negativa, mentre  $\sum_1^n \sum_1^n p_r p_s \frac{\delta x_r}{\delta p_s} = 0$ . Si osservi che  $\sum_1^n \sum_1^n p_r p_s \frac{\delta x_r}{\delta p_s} = \sum_{r=1}^n p_r \left( \frac{\partial x_r}{\partial M} M + \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_r}{\partial p_s} p_s \right) = 0$ .

Sempre *nel caso del consumo*, si possono introdurre in  $A$  i valori dati dalla [4]: si dimostra allora, con facili trasformazioni e tenendo conto della [5], che  $A = \frac{\Delta \lambda^{n+1}}{M}$ . Inoltre si dimostra, con lo stesso procedimento accennato poco sopra, che  $\sum_1^n \sum_1^n p_r p_s \frac{\partial x_r}{\partial p_s} = -M$  (ossia è negativa), dove  $n$  può talvolta ridursi a un numero minore di beni, che siano fra loro strettamente interdipendenti e *non* subiscano l'influenza degli altri beni: in tal caso  $M$  viene a significare una parte del reddito.

Ritrovate in tal modo, e corrette, tutte le proposizioni di Hotelling, dobbiamo rilevare che questo autore evita l'errore di attribuire a  $D$ , nel consumo, carattere simmetrico. Egli vede bene che solo nella produzione

(1) Si vedano specialmente i due articoli pubblicati in «Econometrica», gennaio 1935 e luglio 1938.

è lecito riguardare l'espressione  $\Sigma p_i d x_i$  come un differenziale esatto, ossia affermare che essa deriva da una funzione (che è, evidentemente, la rendita marshalliana *in termini monetari*) nell'istesso modo in cui in meccanica il « lavoro elementare » deriva dal « potenziale » : e ciò vuol dire semplicemente che il guadagno in moneta costituisce lo stimolo all'azione dell'imprenditore. Nel consumo  $\Sigma p_i d x_i$  non è un differenziale esatto, ma possiamo introdurre il fattore integrante  $\frac{1}{\lambda}$  riportandoci così all'ofelimità : in conseguenza di ciò, e sempre *teoricamente*, deve per il singolo consumatore sussistere una relazione per terne di variabili, nota ai matematici (v. per esempio RUSSELL FORSYTH, *Equazioni differenziali*, pag. 209) e riportata dall'Hotelling nel primo dei citati articoli (pag. 67).